Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 16. April 2014

Funktionalanalysis II

2. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es sei $E = C[0,1]$. Auf E sind drei lokalkonvexe Topologien definiert, nämlich die Normtopologie $\mathscr{T}_N$, die schwache Topologie $\mathscr{T}_S$ und die Topologie $\mathscr{T}_P$ der punktweisen Konvergenz. Welche dieser Topologien ist die stärkste und welche die schwächste?

2) a) Es sei E ein normierter Raum, (x_n) eine Folge in E und $x \in E$. Zeigen Sie: $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ $(n \to \infty)$. $\iff$ $\sup\{\, \|x_n\| : n \in \mathbb{N}\,\} < \infty$ und $\Phi(x_n) \to \Phi(x)$ $(n \to \infty)$ für alle Φ in einer dichten Teilmenge D von E'.
Hinweise: E' ist mit der Operatornorm ein Banachraum. Jedes $x \in E$ induziert ein $f_x \in E''$ durch $f_x(\Phi) := \Phi(x)$ $(\Phi \in E')$, und es ist $\|f_x\| = \|x\|$. Verwenden Sie die Sätze 2.2.1 und 2.2.5.

   b) Es sei $E = c_0$ oder $E = \ell^p$ mit $1 < p < \infty$, $(x^{(n)})$ eine Folge in E und $x \in E$. Zeigen Sie: $x^{(n)} \xrightarrow{\sigma} x$ $(n \to \infty)$. $\iff$ $\sup\{\, \|x_n\|_p : n \in \mathbb{N}\,\} < \infty$ (wobei $p = \infty$, falls $E = c_0$) und $x_k^{(n)} \to x_k$ $(n \to \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

   c) Es sei $1 < p < \infty$. Finden Sie eine schwach konvergente Folge $(x^{(n)})$ in ℓ^p, die nicht konvergent ist.

   d) Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge $(x^{(n)})$ in ℓ^1 auch konvergent ist.
Hinweis: Diese Aufgabe ist etwas schwieriger. Führen Sie den Beweis indirekt und verwenden Sie $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$.

3) Es sei H ein Hilbertraum, (x_n) eine Folge in H und $x \in H$. Zeigen Sie:

   a) $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ $(n \to \infty)$. $\iff$ $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ $(n \to \infty)$ für alle $y \in H$.

   b) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. $\iff$ $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ $(n \to \infty)$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$.