Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 9. April 2014

Funktionalanalysis II

1. Übungsblatt, SoSe 2014

1) a) Es seien H, K Hilberträume, $T \in L(H,K)$ und $T^* \in L(K,H)$ der zu T adjungierte Operator. Weiter sei $\{ e_\alpha : \alpha \in \mathsf{A} \}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H. Zeigen Sie:
$$T^* y = \sum_{\alpha \in \mathsf{A}} \langle y, Te_\alpha \rangle e_\alpha \,, \quad y \in K \,.$$
   b) Es seien H, K Innenprodukträume, $\dim H < \infty$ und $T \in L(H,K)$. Zeigen Sie, dass der zu T adjungierte Operator $T^* \in L(K,H)$ existiert.
   c) Es sei $H = L^2[0,1]$, U der Unterraum aller Polynome und $T \in L(U,H)$ definiert durch $Tu := u$ für $u \in U$. Untersuchen Sie, ob der zu T adjungierte Operator $T^* \in L(H,U)$ existiert. Versuchen Sie, das Beispiel zu verallgemeinern.

2) a) Es sei $H = L^2[0,1]$ und für $k \in L^2\left([0,1]^2\right)$ sei der Integraloperator T_k definiert durch
$$(T_k f)(t) := \int_0^1 k(t,x) f(x)\, dx \,, \quad f \in H \,.$$
Zeigen Sie, dass $T_k \in L(H)$ und bestimmen Sie den adjungierten Operator T_k^*. Unter welchen Voraussetzungen an k ist T_k hermitesch bzw. normal?
   b) Es sei $H = \ell^2$ und $T \in L(H)$ definiert durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$ für $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in H$. Untersuchen Sie, ob T hermitesch oder normal ist.

3) Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in L(H)$ hermitesch. Zeigen Sie:
   a) Die Operatoren $T + iI$ und $T - iI$ sind bijektiv und haben eine stetige Inverse.
   b) Der Operator $U_T := (T + iI)(T - iI)^{-1}$ ist unitär.
   c) Der Operator $I - U_T$ hat eine stetige Inverse, und es gilt $T = -i(I + U_T)(I - U_T)^{-1}$.

4) Es seien H ein Hilbertraum und $P \in L(H)$ eine Projektion (d.h. $P^2 = P$) mit $P \neq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   a) P ist eine Orthogonalprojektion, d.h. $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.
   b) $\|P\| = 1$.
   c) P ist hermitesch.
   d) P ist normal.
   e) $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ für alle $x \in H$.