Maß- und Integrationstheorie

1 Messbare Mengen und Abbildungen

Definition 1.1. Es sei X eine Menge und $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

(S1) $X \in \mathscr{A}$.

(S2) Ist $A \in \mathscr{A}$, so ist $X \setminus A \in \mathscr{A}$.

(S3) Sind $A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Dann heißt $\mathscr{A}$ eine *σ-Algebra* in X und das Paar $(X, \mathscr{A})$ ein *messbarer Raum*. Jede Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt eine *messbare Menge*. Ist X ein messbarer Raum, Y ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so heißt f *messbar*, wenn für jede offene Menge V in Y das Urbild $U := f^{-1}(V)$ messbar in X ist.

Bemerkung 1.2. Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $\varnothing \in \mathscr{A}$.

(b) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, so ist $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}$.

(c) Sind $A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

(d) Sind A, $B \in \mathscr{A}$, so ist $A \setminus B \in \mathscr{A}$.

Beispiel 1.3. (1) Es sei X eine Menge und $\mathscr{A} := \mathscr{P}(X)$. Dann ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X.

(2) Es sei X eine Menge und

$$\mathscr{A} := \{\, A \subset X : A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar} \,\}.$$

Dann ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X.

(3) Es seien X eine Menge, $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X, $Y \subset X$ und

$$\mathscr{B} := \{\, A \cap Y : A \in \mathscr{A} \,\}.$$

Dann ist $\mathscr{B}$ eine σ-Algebra in Y.

(4) Es seien X, Y Mengen, $\mathscr{B}$ eine σ-Algebra in Y, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und

$$\mathscr{A} := \{\, f^{-1}(B) \subset X : B \in \mathscr{B} \,\}.$$

Dann ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X.

(5) Es seien X, Y Mengen, $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und

$$\mathscr{B} := \{\, B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \,\}\,.$$

Dann ist $\mathscr{B}$ eine σ-Algebra in Y.

(6) Es seien X eine Menge, $\mathscr{A}_\alpha$ für $\alpha \in \mathsf{A}$ (A eine Indexmenge) σ-Algebren in X und

$$\mathscr{A} := \bigcap_{\alpha \in \mathsf{A}} \mathscr{A}_\alpha\,.$$

Dann ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X.

Definition 1.4. Es sei X eine Menge und $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathscr{E})$ in X mit $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$, nämlich

$$\mathscr{A} := \bigcap \{\, \mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X) : \mathscr{E} \subset \mathscr{B} \text{ und } \mathscr{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \,\}\,.$$

$\mathscr{A}(\mathscr{E})$ heißt die von $\mathscr{E}$ *erzeugte σ-Algebra* und $\mathscr{E}$ ein *Erzeuger* von $\mathscr{A}(\mathscr{E})$.

Beispiel 1.5. (1) Es sei X eine Menge und $\mathscr{E}$ eine σ-Algebra in X. Dann ist $\mathscr{A}(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$.

(2) Es sei X eine Menge, $A \subset X$ mit $\varnothing \neq A \neq X$ und $\mathscr{E} := \{A\}$. Dann ist $\mathscr{A}(\mathscr{E}) = \{\varnothing, A, X \setminus A, X\}$.

(3) Es sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $\mathscr{B} := \mathscr{A}(\mathscr{T})$ die von $\mathscr{T}$ erzeugte σ-Algebra. Jede Menge $B \in \mathscr{B}$ heißt eine Borel-*Menge*. Insbesondere ist also jede offene und jede abgeschlossene Menge eine Borel-Menge. Weiterhin ist jede abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen (F_σ-*Menge*) und jeder abzählbare Durchschnitt offener Mengen (G_δ-*Menge*) eine Borel-Menge. Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie, so wird die σ-Algebra der Borel-Mengen bereits von der Menge der beschränkten, offenen (oder abgeschlossenen oder halboffenen) n-dimensionalen Intervalle (Quader) erzeugt. Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine messbare Abbildung (bzgl. $\mathscr{B}$), so heißt f eine Borel-*Abbildung*. Insbesondere ist jede stetige Abbildung eine Borel-Abbildung.

Satz 1.6. *Es sei X ein messbarer Raum. Dann gelten folgende Aussagen*:

(a) *Sind u, $v\colon X \to \mathbb{R}$ messbar, so ist $f := u + iv\colon X \to \mathbb{C}$ messbar.*

(b) *Ist $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar, so sind* $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|\colon X \to \mathbb{R}$ *messbar.*

(c) *Sind f, $g\colon X \to \mathbb{C}$ messbar, so sind $f + g$ und $f \cdot g$ messbar.*

(d) *Es sei $A \subset X$ messbar und $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist χ_A messbar und heißt charakteristische Funktion *oder* Indikatorfunktion *von A.*

(e) *Ist $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar, so gibt es eine messbare Funktion $\alpha\colon X \to \mathbb{C}$ mit $|\alpha(x)| = 1$ und $f(x) = \alpha(x)|f(x)|$ für alle $x \in X$.*

(f) *Sind* $f_n \colon X \to [-\infty, \infty]$ $(n \in \mathbb{N})$ *messbar, so sind* $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *und* $h := \limsup_{n\to\infty} f_n$ *messbar.*

(g) *Sind* $f_n \colon X \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ *messbar und existiert* $f := \lim_{n\to\infty} f_n$*, so ist* f *messbar.*

(h) *Sind* $f,\ g \colon X \to [-\infty, \infty]$ *messbar, so sind* $\max\{f, g\}$ *und* $\min\{f, g\}$ *messbar. Insbesondere sind* $f^+ := \max\{f, 0\}$ *und* $f^- := -\min\{f, 0\}$ *messbar.*

(i) *Ist* $f \colon X \to [-\infty, \infty]$ *und* $f^{-1}((\alpha, \infty])$ *messbar für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$*, so ist* f *messbar.*

Definition 1.7. Es sei X ein messbarer Raum und $s \colon X \to [0, \infty)$. s heißt eine *einfache Funktion*, wenn das Bild $s(X)$ nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Bemerkung 1.8. Ist s eine einfache Funktion und $s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, so setzen wir $A_k := s^{-1}(\alpha_k)$ für $k = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}\,,$$

und s ist messbar genau dann, wenn $A_1, \dots, A_n$ messbar sind.

Satz 1.9. *Es sei* X *ein messbarer Raum und* $f \colon X \to [0, \infty)$ *messbar. Dann gibt es eine Folge einfacher, messbarer Funktionen* $s_n \colon X \to [0, \infty)$ *mit* $0 \le s_1(x) \le s_2(x) \le \cdots \le f(x)$ *und* $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in X$*.*

2 Maße

Definition 2.1. Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $\mu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ heißt ein *positives Maß*, wenn gilt:

(a) Sind $A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt, so ist

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,. \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

(b) Es gibt ein $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) < \infty$.

Das Tripel $(X, \mathscr{A}, \mu)$ heißt dann ein *Maßraum*. Ein positives Maß heißt *endlich*, wenn $\mu(X) < \infty$. Ist speziell $\mu(X) = 1$, so heißt μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*. μ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge (A_n) in $\mathscr{A}$ gibt mit $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ heißt ein *reelles* (oder *signiertes*) bzw. *komplexes Maß*, wenn (a) gilt.

Satz 2.2. *Es sei* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $\mu(\varnothing) = 0$.

(b) *Sind* $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ *paarweise disjunkt, so gilt*

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)\,. \quad (\text{Endliche Additivität})$$

(c) *Sind* $A, B \in \mathscr{A}$ *und* $A \subset B$, *so gilt*

$$\mu(A) \leq \mu(B)\,. \quad \text{(Monotonie)}$$

(d) *Sind* $A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *und* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)\,. \quad \text{(Stetigkeit von unten)}$$

(e) *Sind* $A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ *und* $\mu(A_1) < \infty$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)\,. \quad \text{(Stetigkeit von oben)}$$

Beispiel 2.3. (1) Es sei X eine Menge, $\mathscr{A} := \mathscr{P}(X)$ und $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich,} \\ \text{Anzahl der Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich.} \end{cases}$$

Dann ist μ ein positives Maß und heißt das *abzählende Maß* oder *Zählmaß* auf X.

(2) Es sei X eine Menge, $\mathscr{A} := \mathscr{P}(X)$, $x_0 \in X$ und $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty)$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_0 \in A, \\ 0, & \text{falls } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Dann ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und heißt das an x_0 *konzentrierte Einheitsmaß* oder DIRAC-*Maß* und wird mit δ_{x_0} bezeichnet.

(3) Es sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathscr{A}$ die σ-Algebra der BOREL-Mengen in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau ein positives Maß μ auf $\mathscr{A}$ mit $\mu(I) = \operatorname{vol}(I)$ für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}^n$ und $\mu(x + A) = \mu(A)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A \in \mathscr{A}$. μ heißt das LEBESGUE-BOREL*sche Maß auf* $\mathbb{R}^n$ und wird oft mit λ oder λ_n bezeichnet. Wir wollen die Konstruktion dieses Maßes im Folgenden näher beschreiben.

Definition 2.4. Für $k = 1, \ldots, n$ seien $x_{j,k} \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m_k + 1)$ gegeben mit

$$x_{1,k} < x_{2,k} < \cdots < x_{m_k+1,k}\,.$$

Es sei $P_{j,k} \subset \mathbb{R}^n$ die Hyperebene mit der Gleichung $x_k = x_{j,k}$ (dabei sei x_k die k-te Komponente von $x \in \mathbb{R}^n$). Es sei Π die Vereinigung dieser Hyperebenen. Dann heißt Π ein *Gitter* in $\mathbb{R}^n$. Ein Gitter Π unterteilt $\mathbb{R}^n$ in endlich viele n-dimensionale Intervalle, die wir *Intervalle* von Π nennen, und in endlich viele unbeschränkte Mengen. Eine Menge $Y \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Figur*, wenn Y die Vereinigung von Intervallen $I_1, \ldots, I_p$ eines Gitters Π ist. Weiter heißt

$$\lambda(Y) := \operatorname{vol}(I_1) + \cdots + \operatorname{vol}(I_p)$$

das *Maß* von Y.

Bis hierher ist das Vorgehen genauso wie beim JORDAN-Inhalt. Jetzt geht es anders weiter.

Definition 2.5. (1) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt

$$\lambda(\Omega) := \sup\{\,\lambda(Y) : Y \subset \Omega,\ Y \text{ ist Figur}\,\}$$

das *Maß* von Ω. Es gilt $0 < \lambda(\Omega) \leq +\infty$.

(2) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann heißt

$$\lambda(K) := \inf\{\,\lambda(Y) : K \subset \mathring{Y},\ Y \text{ ist Figur}\,\}$$

das *Maß* von K. Es gilt $0 \leq \lambda(K) < +\infty$.

(3) Es sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann heißt

$$\lambda^*(A) := \inf\{\,\lambda(\Omega) : A \subset \Omega,\ \Omega \text{ ist offen}\,\}$$

das *äußere Maß* von A und

$$\lambda_*(A) := \sup\{\,\lambda(K) : K \subset A,\ K \text{ ist kompakt}\,\}$$

das *innere Maß* von A. Es gilt

$$0 \leq \lambda_*(A) \leq \lambda^*(A) \leq +\infty\,.$$

Die Menge A heißt *messbar*, wenn gilt

$$\lambda(A) := \lambda_*(A) = \lambda^*(A)\,,$$

und $\lambda(A)$ heißt das *n-dimensionale* LEBESGUE-*Maß* von A. Es gilt $0 \leq \lambda(A) \leq +\infty$.

(4) Die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, wenn $\lambda(A) = 0$.

Dann kann man zeigen, dass λ tatsächlich ein Maß auf einer σ-Algebra, die die BOREL-Mengen enthält, ist. Schränkt man λ auf die BOREL-Mengen ein, so erhält man das oben erwähnte Maß.

Bemerkung 2.6. (a) Jede JORDAN-messbare Menge ist LEBESGUE-messbar und die Maße stimmen überein.

(b) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist LEBESGUE-messbar. $\iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $K \subset A \subset \Omega$ und $\lambda(\Omega \setminus K) < \varepsilon$.

(c) Jede abzählbare Menge in $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge, also z.B. $\mathbb{Q}^n$.

(d) Es gibt auch überabzählbare Nullmengen, z.B. die CANTOR-Menge.

(e) Es gibt Mengen, die nicht LEBESGUE-messbar sind. Solche Mengen heißen auch *Vitalische Mengen*, da sie von VITALI erstmals entdeckt wurden. Zur Konstruktion solcher Mengen benötigt man jedoch das Auswahlaxiom.

(f) Es gibt LEBESGUE-messbare Mengen, die keine BOREL-Mengen sind.

3 Lebesgue-Integral von positiven Funktionen

Im Folgenden sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ immer ein Maßraum mit einem positiven Maß μ.

Definition 3.1. Es sei $s\colon X \to [0, \infty)$ eine einfache, messbare Funktion der Form

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k},$$

und $A \in \mathscr{A}$. Dann setzen wir

$$\int_A s \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap A)$$

mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$. Es sei nun $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar und $A \in \mathscr{A}$. Dann setzen wir

$$\int_A f \, d\mu := \sup \int_A s \; d\mu \,,$$

wobei das Supremum über alle einfachen, messbaren Funktionen s mit $0 \leq s(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$ genommen wird. Dann heißt $\int_A f \, d\mu$ das Lebesgue-*Integral* von f über A.

Der Hauptunterschied zwischen dem Lebesgue-Integral und dem Riemann-Integral besteht darin, dass beim R-Integral Treppenfunktionen zur Definition benutzt werden, beim L-Integral hingegen verallgemeinerte Treppenfunktionen (nämlich die einfachen, messbaren Funktionen).

Satz 3.2. *Alle im Folgenden auftretenden Mengen und Funktionen seien messbar. Dann gelten folgende Aussagen*:

(a) *Ist* $0 \leq f \leq g$, *so ist* $\displaystyle\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu$.

(b) *Ist* $A \subset B$ *und* $f \geq 0$, *so ist* $\displaystyle\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.

(c) *Ist* $f \geq 0$ *und* $c \in [0, \infty)$ *so ist* $\displaystyle\int_A cf \, d\mu = c \int_A f \, d\mu$.

(d) *Ist* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in A$, *so ist* $\displaystyle\int_A f \, d\mu = 0$.

(e) *Ist* $\mu(A) = 0$, *so ist* $\displaystyle\int_A f \, d\mu = 0$.

(f) *Ist* $f \geq 0$, *so ist* $\displaystyle\int_A f \, d\mu = \int_X \chi_A f \, d\mu$.

Satz 3.3 (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** *Es sei* (f_n) *eine Folge messbarer Funktionen auf* X *mit* $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *für alle* $x \in X$. *Dann ist* f *messbar, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \,.$$

Satz 3.4 (Lemma von FATOU). *Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen auf X mit $f_n(x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Dann gilt*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Satz 3.5. *Es sei $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar und $\nu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ definiert durch*

$$\nu(\mathscr{A}) := \int_A f \, d\mu \quad (A \in \mathscr{A}).$$

Dann ist ν ein positives Maß auf $\mathscr{A}$, und es gilt

$$\int_X g \, d\nu = \int_X gf \, d\mu$$

für alle messbaren Funktionen $g\colon X \to [0,\infty]$. Hierfür schreibt man auch kurz

$$d\nu = f \, d\mu \, .$$

4 Lebesgue-Integral von komplexen Funktionen

Definition 4.1. Es sei $\mathscr{L}^1(\mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu < \infty \, .$$

Jedes $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ heißt eine LEBESGUE-*integrierbare Funktion* (bzgl. μ). Ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $f = u + iv$, so setzen wir für $A \in \mathscr{A}$

$$\int_A f \, d\mu := \int_A u^+ \, d\mu - \int_A u^- \, d\mu + i \int_A v^+ \, d\mu - i \int_A v^- \, d\mu \, .$$

Satz 4.2. *Es seien $f,\, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C}$. Dann ist $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu \, .$$

Satz 4.3. *Es sei $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Dann gilt*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu \, .$$

Satz 4.4 (Satz von der dominierenden Konvergenz). *Es seien $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ messbar ($n \in \mathbb{N}$), es existiere $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, und es gebe ein $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \, .$$

Definition 4.5. Eine Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt *Nullmenge*, wenn $\mu(A) = 0$ ist. Ist $A \in \mathscr{A}$ und E eine Eigenschaft über die Elemente von A, so sagt man: E gilt *fast überall* (f.ü) auf A (oder E gilt *für fast alle* $x \in A$), wenn $\{ x \in A : E \text{ gilt für } x \text{ nicht} \}$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung 4.6. Sind f, $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $f = g$ f.ü. auf X, so ist

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu \, .$$

Grob gesagt: Nullmengen spielen bei der Integration keine Rolle.

Satz 4.7. *Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathscr{A}^*$ das System aller Mengen $M \subset X$ mit der Eigenschaft: Es gibt Mengen A, $B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset M \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. Für jedes $M \in \mathscr{A}^*$ setzen wir $\mu^*(M) := \mu(A)$. Dann ist $\mathscr{A}^*$ eine σ-Algebra in X und μ^* ein positives Maß auf $\mathscr{A}^*$. Das Maß μ^* heißt* vollständig *und $\mathscr{A}^*$ die μ-*Vervollständigung *von $\mathscr{A}$. Es ist also jede Teilmenge einer μ-Nullmenge $\mathscr{A}^*$-messbar mit Maß 0. Das* Lebesgue-*Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist gerade die Vervollständigung des* Lebesgue-Borel*schen Maßes.*

Satz 4.8. *Es seien $f_n \colon X \to \mathbb{C}$ messbar $(n \in \mathbb{N})$ und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty \, .$$

Dann konvergiert die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

für fast alle $x \in X$, es ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, und es gilt

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Satz 4.9. (a) *Ist $f \colon X \to [0, \infty]$ messbar, $A \in \mathscr{A}$ und $\int_A f \, d\mu = 0$, so ist $f = 0$ f.ü. auf A.*

(b) *Ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $\int_A f \, d\mu = 0$ für alle $A \in \mathscr{A}$, so ist $f = 0$ f.ü. auf X.*

(c) *Ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \int_X |f| \, d\mu \, ,$$

so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha f = |f|$ f.ü. auf X.

5 Komplexe Maße

Definition 5.1. Es sei X eine Menge und $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X. Ist $A \in \mathscr{A}$ und $\mathscr{Z} = \{ A_n \in \mathscr{A} : n \in \mathbb{N} \}$ ein abzählbares System paarweise disjunkter Mengen mit

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, so heißt $\mathscr{Z}$ eine *Zerlegung* von A. Nun sei μ ein komplexes Maß auf $\mathscr{A}$. Für $A \in \mathscr{A}$ definieren wir

$$|\mu|(A) := \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| ,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathscr{Z}$ von A genommen wird. Diese Funktion $|\mu|\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ heißt die *totale Variation* von μ.

Satz 5.2. *Es sei X eine Menge, $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X und μ ein komplexes Maß auf $\mathscr{A}$. Dann ist die totale Variation $|\mu|$ von μ ein positives endliches Maß auf $\mathscr{A}$. Insbesondere gilt $|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(X) < \infty$ für alle $A \in \mathscr{A}$. Man sagt auch: μ ist von* beschränkter Variation.

Bemerkung 5.3. Es sei X eine Menge und $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X. Sind μ, ν komplexe Maße auf $\mathscr{A}$ und $c \in \mathbb{C}$, so definieren wir komplexe Maße $\mu + \nu$ und $c\mu$ durch

$$(\mu + \nu)(A) := \mu(A) + \nu(A) \quad \text{und} \quad (c\mu)(A) := c\mu(A) \quad (A \in \mathscr{A}).$$

Die Menge aller komplexen Maße auf $\mathscr{A}$ wird damit zu einem komplexen Vektorraum. Setzen wir noch

$$\|\mu\| := |\mu|(X) ,$$

so erhalten wir sogar einen normierten Raum.

Bemerkung 5.4. Es sei X eine Menge, $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra in X und μ ein reelles Maß auf $\mathscr{A}$. Wir definieren $|\mu|$ wie in Definition 5.1 und setzen

$$\mu^+ := \tfrac{1}{2}(|\mu| + \mu) \quad \text{und} \quad \mu^- := \tfrac{1}{2}(|\mu| - \mu) .$$

Nach Satz 5.2 sind μ^+, μ^- positive endliche Maße, und es gilt

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad \text{und} \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^- .$$

Die Maße μ^+ bzw. μ^- heißen die *positive* bzw. *negative Variation* von μ, und die erste Gleichung heißt die JORDAN-*Zerlegung* von μ.

Definition 5.5. Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν ein beliebiges Maß auf $\mathscr{A}$.

(a) ν heißt *absolut stetig* bezüglich μ, wenn gilt: Ist $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) = 0$, so ist $\nu(A) = 0$. Wir schreiben dann $\nu \ll \mu$.

(b) ν heißt *konzentriert* auf $A \in \mathscr{A}$, wenn gilt: $\nu(B) = \nu(A \cap B)$ für alle $B \in \mathscr{A}$. (Dies ist äquivalent zu: $\nu(B) = 0$ für alle $B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \varnothing$.)

(c) Sind ν_1, ν_2 beliebige Maße auf $\mathscr{A}$, so heißen ν_1 und ν_2 zueinander *singulär*, wenn gilt: Es gibt Mengen A, $B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \varnothing$, ν_1 ist konzentriert auf A und ν_2 ist konzentriert auf B. Wir schreiben dann $\nu_1 \perp \nu_2$.

Satz 5.6. *Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und ν, ν_1, ν_2 beliebige Maße auf $\mathscr{A}$. Dann gelten folgende Aussagen*:

(a) *Ist ν konzentriert auf $A \in \mathscr{A}$, so auch $|\nu|$.*

(b) *Ist* $\nu_1 \perp \nu_2$, *so ist* $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

(c) *Sind* $\nu_1 \perp \mu$ *und* $\nu_2 \perp \mu$, *so ist* $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(d) *Sind* $\nu_1 \ll \mu$ *und* $\nu_2 \ll \mu$, *so ist* $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(e) *Ist* $\nu \ll \mu$, *so ist* $|\nu| \ll \mu$.

(f) *Ist* $\nu_1 \ll \mu$ *und* $\nu_2 \perp \mu$, *so ist* $\nu_1 \perp \nu_2$.

(g) *Ist* $\nu \ll \mu$ *und* $\nu \perp \mu$, *so ist* $\nu = 0$.

Satz 5.7 (Zerlegungssatz von LEBESGUE). *Es sei* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* μ *sei* σ*-endlich und* ν *ein positives, endliches oder komplexes Maß auf* $\mathscr{A}$. *Dann gibt es ein Paar von Maßen* ν_a *und* ν_s *auf* $\mathscr{A}$ *mit* $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_a \ll \mu$ *und* $\nu_s \perp \mu$. *Das Paar* (ν_a, ν_s) *heißt die* LEBESGUE-Zerlegung *von* ν *bezüglich* μ.

Satz 5.8 (Satz von RADON-NIKODYM). *Es sei* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* μ *sei* σ*-endlich,* ν *ein positives, endliches oder komplexes Maß auf* $\mathscr{A}$ *und* (ν_a, ν_s) *die* LEBESGUE*-Zerlegung von* ν *bezüglich* μ. *Dann gibt es genau eine Funktion* $h \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *mit*

$$\nu_a(A) = \int_A h \, d\mu \quad \forall A \in \mathscr{A} .$$

Die Funktion h *heißt die* RADON-NIKODYM-Ableitung *von* ν_a *bezüglich* μ. *Man schreibt dafür auch* $d\nu_a = h \, d\mu$ *oder* $h = \frac{d\nu_a}{d\mu}$.

Satz 5.9. *Es sei* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* ν *ein komplexes Maß auf* $\mathscr{A}$. *Dann gilt*: $\nu \ll \mu \iff$ *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *mit* $|\nu(A)| < \varepsilon$ *für alle* $A \in \mathscr{A}$ *mit* $\mu(A) < \delta$.

Satz 5.10. *Es sei* $(X, \mathscr{A})$ *ein messbarer Raum und* μ *ein komplexes Maß auf* $\mathscr{A}$. *Dann gibt es eine messbare Funktion* $h \colon X \to \mathbb{C}$ *mit* $|h(x)| = 1$ *für alle* $x \in X$ *und*

$$d\mu = h \, d|\mu| .$$

Diese Gleichung heißt die Polardarstellung *oder* Polarzerlegung *von* μ.

Bemerkung 5.11. Aufgrund dieses Satzes kann man das Integral einer messbaren Funktion $f \colon X \to \mathbb{C}$ bezüglich eines komplexen Maßes μ durch

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f h \, d|\mu|$$

definieren.

Satz 5.12. *Es sei* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *und*

$$\nu(A) := \int_A g \, d\mu \quad (A \in \mathscr{A}).$$

Dann gilt

$$|\nu|(A) = \int_A |g| \, d\mu \quad (A \in \mathscr{A}).$$

Satz 5.13 (Zerlegungssatz von HAHN). *Es sei* $(X, \mathscr{A})$ *ein messbarer Raum und* μ *ein reelles Maß auf* $\mathscr{A}$. *Dann gibt es Mengen* A, $B \in \mathscr{A}$ *mit* $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$ *und* $\mu^+(E) = \mu(A \cap E)$, $\mu^-(E) = -\mu(B \cap E)$ *für alle* $E \in \mathscr{A}$. *Das Paar* (A, B) *heißt dann die* HAHN-Zerlegung *von* X *bezüglich* μ.