Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

WiSe 2013/14

Funktionalanalysis I

Beweis von Satz 4.2.15

(i) Es sei $\mathscr{S}$ die Menge aller einfachen messbaren Funktionen $s\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass $\mathscr{S}$ dicht in $L^p[a,b]$ ist.
Zunächst ist klar, dass $\mathscr{S} \subset L^p[a,b]$. Es sei $f \in L^p[a,b]$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Nach Satz 9 (Anhang) gibt es eine Folge einfacher messbarer Funktionen $s_n\colon [a,b] \to [0,\infty)$ mit $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$ und $s_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in [a,b]$. Wegen $0 \leq (f(x) - s_n(x))^p \leq f(x)^p$ für alle $x \in [a,b]$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt aus dem Satz von der dominierenden Konvergenz $\|f - s_n\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$, also $f \in \overline{\mathscr{S}}$. Der allgemeine Fall eines beliebigen $f \in L^p[a,b]$ folgt durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil und deren Zerlegung in Positiv- und Negativteil.
(ii) Nun $\mathscr{S}_O$ die Menge derjenigen Funktionen $s \in \mathscr{S}$ mit

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{\Omega_k}\,,$$

wobei $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subset [a,b]$ offene Mengen (in der Teilraumtopologie von $[a,b]$) sind. Wir zeigen, dass dann auch $\mathscr{S}_O$ dicht in $L^p[a,b]$ ist. Dazu sei $A \subset [a,b]$ messbar und $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Lebesgue-Maßes λ (siehe Definition 14 des Anhangs) gilt

$$\lambda(A) = \inf\{\, \lambda(\Omega) : A \subset \Omega\,,\ \Omega \text{ ist offen} \,\}\,.$$

Daher gibt es eine offene Menge $\Omega \subset [a,b]$ mit

$$\|\chi_A - \chi_\Omega\|_p = \lambda(\Omega \setminus A)^{1/p} < \varepsilon\,,$$

woraus die Behauptung folgt.
(iii) Ist $\Omega \subset [a,b]$ offen, so ist Ω eine höchstens abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen $I_j \subset [a,b]$. Wegen $\lambda(\Omega) = \sum\limits_j \lambda(I_j)$ ist

$$\chi_\Omega \in \overline{\langle\, \chi_I : I \text{ ist ein offenes Intervall} \,\rangle}\,.$$

Daher genügt es, zu zeigen, dass es zu jedem offenen Intervall $I \subset [a,b]$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C[a,b]$ gibt mit $\|f - \chi_I\|_p < \varepsilon$. Dazu sei $I = (\alpha, \beta)$ mit $a \leq \alpha < \beta \leq b$ und $\delta > 0$ so klein, dass $\alpha + \delta < \beta - \delta$ und $(2\delta)^{1/p} < \varepsilon$. Wir definieren $f \in C[a,b]$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha + \delta \leq x \leq \beta - \delta\,, \\ \frac{1}{\delta}(x - \alpha) & \text{für } \alpha < x < \alpha + \delta\,, \\ \frac{1}{\delta}(\beta - x) & \text{für } \beta - \delta < x < \beta\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann gilt $\|f - \chi_I\|_p \leq (2\delta)^{1/p} < \varepsilon$.