4.3 Operatoren in Hilberträumen

Satz 4.3.1. *Es seien H und K* HILBERT*räume. Dann gibt es zu jedem Operator $T \in L(H,K)$ einen eindeutig bestimmten Operator $T^* \in L(K,H)$ mit*

$$(*) \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

für alle $x \in H$ und $y \in K$. T^* heißt der zu T adjungierte Operator*. Weiterhin gelten folgende Aussagen:*

(a) $\|T^*\| = \|T\|$ *für $T \in L(H,K)$.*

(b) $(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*$ *für S, $T \in L(H,K)$ und α, $\beta \in \mathbb{K}$.*

(c) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ *für $T \in L(H,K)$ und $S \in L(K,M)$, wobei M ein weiterer* HILBERT*raum ist.*

(d) $T^{**} = T$ *für $T \in L(H,K)$.*

(e) $\|T \circ T^*\| = \|T^* \circ T\| = \|T\|^2$ *für $T \in L(H,K)$.*

(f) $\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp$ *und* $\mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^\perp$ *für $T \in L(H,K)$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von T^* ergibt sich leicht aus $(*)$. Es seien $\Phi\colon H \to H'$ und $\Psi\colon K \to K'$ die konjugiert linearen isometrischen Isomorphismen aus dem Darstellungssatz von FRÉCHET-RIESZ. Weiter sei $T'\colon K' \to H'$ der duale Operator gemäß Satz 3.2.1. Wir setzen $T^* := \Phi^{-1} \circ T' \circ \Psi$. Dann ist offenbar $T^* \in L(K,H)$, und die Aussagen (a) – (c) ergeben sich aus den entsprechenden Aussagen über T' in Satz 3.2.1. Die Aussage (d) folgt sofort aus $(*)$ und der Eindeutigkeit von T^*.

(e) Für $x \in H$ gilt

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|x\|\|T^*Tx\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2\,,$$

also $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Daher ist $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ und somit $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|T^{**}T^*\| = \|TT^*\|$.

(f) Es ist $x \in \mathscr{N}(T)$. $\iff$ $Tx = 0$. $\iff$ $\langle Tx, y\rangle = 0$ für alle $y \in K$. $\iff$ $\langle x, T^*y\rangle = 0$ für alle $y \in K$. $\iff$ $x \in \mathscr{R}(T^*)^\perp$. Also gilt $\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp$. Hieraus folgt $\mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T^{**})^\perp = \mathscr{R}(T)^\perp$. □

Bemerkung . Man beachte, dass zwischen der Definition des adjungierten Operators T^* im HILBERTraum (Satz 4.3.1) und des dualen Operators T' in einem beliebigen BANACHraum (Satz 3.2.1) Unterschiede bestehen. Insbesondere ist die Abbildung $T \mapsto T'$ linear, während die Abbildung $T \mapsto T^*$ nur konjugiert linear ist. Dennoch bezeichnen manche Autoren beide Operatoren mit T^*, da es in der Regel keine Verwechslung geben kann.

Ist T ein linearer Operator zwischen endlich-dimensionalen Räumen, so wird T (nach Wahl von Basen) durch eine Matrix A dargestellt. Zu dem Operator T' gehört dann die transponierte Matrix $A^\top$ und zum Operator T^* die konjugiert transponierte Matrix $\overline{A}^\top$.

Wir betrachten nun wichtige Klassen von Operatoren in HILBERTräumen. Dabei schreiben wir für die Komposition $S \circ T$ von Operatoren kurz ST. Weiterhin bezeichnen wir den identischen Operator $\mathrm{id}\colon H \to H$ mit $\mathrm{id}(x) = x$ für alle $x \in H$ mit I_H oder I.

Definition 4.3.2. Es seien H, K HILBERTräume und $T \in L(H, K)$.

- T heißt *unitär*, falls $TT^* = I_K$ und $T^*T = I_H$.
- Ist $K = H$, so heißt T *selbstadjungiert* oder *hermitesch*, falls $T = T^*$.
- Ist $K = H$, so heißt T *normal*, falls $TT^* = T^*T$.

Offensichtlich sind hermitesche und unitäre Operatoren (für $K = H$) normal. Weiterhin sind TT^* und T^*T hermitesch. Ist H ein reeller HILBERTraum, so nennt man einen hermiteschen Operator auch *symmetrisch* und einen unitären Operator auch *orthogonal*.

Historie: CHARLES HERMITE (* 24. Dezember 1822 in Dieuze (Lothringen); † 14. Januar 1901 in Paris) war ein französischer Mathematiker.

Satz 4.3.3 (Satz von HELLINGER-TOEPLITZ)**.** *Es sei H ein* HILBERT*raum und $T\colon H \to H$ eine lineare Abbildung mit*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle\,, \quad x, y \in H\,.$$

Dann ist $T \in L(H)$ und somit T hermitesch.

Beweis. Es sei (x_n) eine Folge in H mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $Tx_n \to y$ $(n \to \infty)$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen und Lemma 2.4.4 ist zu zeigen, dass $y = 0$. Tatsächlich ist wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\langle y, y\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, y\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ty\rangle = 0\,.$$

□

Historie: ERNST DAVID HELLINGER (* 30. September 1883; † 28. März 1950) war ein deutscher Mathematiker. OTTO TOEPLITZ (* 1. August 1881 in Breslau; † 15. Februar 1940 in Jerusalem) war ein deutscher Mathematiker jüdischer Herkunft.

Satz 4.3.4. *Es sei H ein komplexer* HILBERT*raum und $T \in L(H)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

(a) *T ist hermitesch.*

(b) *$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.*

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Für $x \in H$ gilt $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, woraus die Behauptung folgt.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Für $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachten wir die reelle Zahl

$$\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \bar{\lambda}\langle Tx, y\rangle + \lambda\langle Ty, x\rangle + |\lambda|^2\langle Ty, y\rangle\,,$$

und komplexe Konjugation ergibt

$$\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \lambda\langle y, Tx\rangle + \bar{\lambda}\langle x, Ty\rangle + |\lambda|^2\langle Ty, y\rangle\,.$$

Setzen wir speziell $\lambda = 1$ und $\lambda = -i$, so folgt

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle &= \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle\,,\\ \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle &= -\langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle\,.\end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$. □

Satz 4.3.5. *Es sei H ein* Hilbert*raum und $T \in L(H)$ hermitesch. Dann gilt*

$$\|T\| = \sup\{\,|\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H\,\}\,.$$

Beweis. Wir setzen $M := \sup\{\,|\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H\,\}$. Offensichtlich ist $\|T\| \geq M$. Wegen $T^* = T$ folgt

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle &= 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\overline{\langle x, Ty\rangle}\\ &= 4\,\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle\,.\end{aligned}$$

Wegen $|\langle Tx, x\rangle| \leq M\|x\|^2$ für alle $x \in H$ ergibt sich aus der Parallelogrammgleichung

$$4\,\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

und damit $\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq M$ für alle x, $y \in B_H$. Ist $\langle Tx, y\rangle = e^{i\theta}|\langle Tx, y\rangle|$, so ersetzen wir x durch $e^{i\theta}x$ und erhalten $|\langle Tx, y\rangle| \leq M$ für alle x, $y \in B_H$. Bilden wir das Supremum über alle $y \in B_H$, so folgt $\|Tx\| \leq M$ für alle $x \in B_H$ und somit $\|T\| \leq M$. □

Folgerung 4.3.6. *Es sei H ein* Hilbert*raum, $T \in L(H)$ hermitesch und $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Dann ist $T = 0$.*

Bemerkung . Dieser Eindeutigkeitssatz ist im Allgemeinen falsch, wenn T nicht hermitesch ist. Man betrachte dazu zum Beispiel den reellen Hilbertraum $H = \mathbb{R}^2$ und T eine Drehung um 0 mit Winkel 90°. Für komplexe Hilberträume gilt er jedoch für alle stetigen Operatoren wie folgender Satz zeigt.

Satz 4.3.7. *Es sei H ein komplexer* Hilbert*raum und $T \in L(H)$ mit $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Dann ist $T = 0$.*

Beweis. Nach Satz 4.3.4 ist T hermitesch und daher ergibt sich die Behauptung aus Folgerung 4.3.6. □

Satz 4.3.8. *Es sei H ein* Hilbert*raum und $T \in L(H)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

(a) *T ist normal.*

(b) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ *für alle* $x, y \in H$.

(c) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *für alle* $x \in H$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Da T normal ist, gilt $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, TT^*y\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$. Die Implikation (b) $\Longrightarrow$ (c) ist offensichtlich (man setze $x = y$).

(c) $\Longrightarrow$ (a): Es folgt $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle$. Da T^*T und TT^* hermitesch sind, ergibt sich die Normalität von T aus Folgerung 4.3.6. ☐

Folgerung 4.3.9. *Es sei H ein* Hilbert*raum und $T \in L(H)$ normal. Dann gilt* $\mathscr{N}(T) = \mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^\perp = \mathscr{R}(T^*)^\perp$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.3.1 (f) und 4.3.8 ☐

Satz 4.3.10. *Es seien H, K Innenprodukträume und $T \in L(H, K)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist eine Isometrie.*

(b) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ *für alle* $x, y \in H$.

Beweis. Die Implikation (b) $\Longrightarrow$ (a) ist offensichtlich (man setze $x = y$). Zum Beweis der Implikation (a) $\Longrightarrow$ (b) seien $x, y \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\langle T(x+\lambda y), T(x+\lambda y)\rangle &= \|Tx\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle Tx, \lambda Ty\rangle + |\lambda|^2\|Ty\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle Tx, Ty\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2\end{aligned}$$

und andererseits

$$\langle T(x+\lambda y), T(x+\lambda y)\rangle = \|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 .$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert $\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle Tx, Ty\rangle = \operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x, y\rangle$. Setzt man $\lambda = 1$ und anschließend (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $\lambda = i$, so folgt $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. ☐

Satz 4.3.11. *Es seien H, K* Hilbert*räume und $T \in L(H, K)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist unitär.*

(b) *T ist surjektiv und* $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ *für alle* $x, y \in H$.

(c) *T ist ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Es sei $z \in K$. Wir setzen $x := T^*z$. Dann ist $Tx = TT^*z = I_Kz = z$, also T surjektiv. Weiter folgt $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, I_Hy\rangle = \langle x, y\rangle$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Für $x, y \in H$ gilt $\langle T^*Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, also $\langle T^*Tx - x, y\rangle = 0$. Setzen wir speziell $y = T^*Tx - x$, so folgt $T^*Tx = x$. Ist $y \in K$, so gibt es wegen der Surjektivität von T ein $x \in H$ mit $y = Tx$. Also ist $TT^*y = TT^*Tx = Tx = y$.

Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus Satz 4.3.10. ☐