Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

WiSe 2013/14

Funktionalanalysis I

Beweis der Minkowskischen Ungleichung

Wegen $\|f+g\|_p \le \||f|+|g|\|_p$ können wir $f \ge 0$ und $g \ge 0$ annehmen. Im Fall $p = 1$ oder $p = \infty$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Also sei $1 < p < \infty$. Weiter können wir annehmen, dass $\|f + g\|_p > 0$, da sonst die Behauptung trivial ist. Wegen

$$\begin{aligned}[f(x) + g(x)]^p &\le [2 \sup \{f(x), g(x)\}]^p = 2^p \sup \{f(x)^p, g(x)^p\} \\ &\le 2^p[f(x)^p + g(x)^p]\,, \quad x \in X\end{aligned}$$

folgt $\|f + g\|_p < \infty$, also $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Nun erhalten wir mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|f + g\|_p^p = \int_X (f + g)^p \, d\mu &= \int_X f(f + g)^{p-1} \, d\mu + \int_X g(f + g)^{p-1} \, d\mu \\ &\le (\|f\|_p + \|g\|_p)\|(f + g)^{p-1}\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1}\,.\end{aligned}$$

Da $0 < \|f + g\|_p < \infty$ liefert Division durch $\|f + g\|_p^{p-1}$ die Behauptung.