Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

WiSe 2013/14

Funktionalanalysis I

Beweis von Lemma 4.2.4

Den einfachen Beweis der Aussage (a) überlassen wir dem Leser.
(b) „$\Longrightarrow$“: Es sei $\sum\limits_{\alpha\in\mathsf{A}} x_\alpha = x$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine endliche Menge $\mathsf{B}(\varepsilon) \subset \mathsf{A}$ mit $\left\| x - \sum\limits_{\alpha\in\mathsf{B}'} x_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle endlichen Mengen B' mit $\mathsf{B}(\varepsilon) \subset \mathsf{B}' \subset \mathsf{A}$. Es sei $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ endlich und $\mathsf{B} \cap \mathsf{B}(\varepsilon) = \emptyset$. Dann folgt

$$\left\| \sum_{\alpha\in\mathsf{B}} x_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha\in\mathsf{B}\cup\mathsf{B}(\varepsilon)} x_\alpha - \sum_{\alpha\in\mathsf{B}(\varepsilon)} x_\alpha \right\| \leq \left\| x - \sum_{\alpha\in\mathsf{B}\cup\mathsf{B}(\varepsilon)} x_\alpha \right\| + \left\| x - \sum_{\alpha\in\mathsf{B}(\varepsilon)} x_\alpha \right\| < \varepsilon\,.$$

Bemerkung: Diese Implikation gilt in jedem normierten Raum.
„$\Longleftarrow$“: Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine endliche Menge $\mathsf{B}_n \subset \mathsf{A}$ mit $\left\| \sum\limits_{\alpha\in\mathsf{B}} x_\alpha \right\| < \frac{1}{n}$ für jede endliche Menge $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ mit $\mathsf{B} \cap \mathsf{B}_n = \emptyset$. Dabei können wir erreichen, dass $\mathsf{B}_n \subset \mathsf{B}_{n+1}$. Es ist $\left(\sum\limits_{\alpha\in\mathsf{B}_n} x_\alpha \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E, denn für $m > n$ gilt

$$\left\| \sum_{\alpha\in\mathsf{B}_m} x_\alpha - \sum_{\alpha\in\mathsf{B}_n} x_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha\in\mathsf{B}_m\setminus\mathsf{B}_n} x_\alpha \right\| < \frac{1}{n}\,.$$

Da E vollständig ist, existiert $x := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\alpha\in\mathsf{B}_n} x_\alpha \in E$ und durch Grenzübergang $m \to \infty$ in der letzten Gleichung folgt

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in\mathsf{B}_n} x_\alpha \right\| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Wir zeigen nun, dass $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ zum Wert x summierbar ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\mathsf{B}(\varepsilon) := \mathsf{B}_{n_0}$. Dann folgt für jede endliche Menge $\mathsf{B} \supset \mathsf{B}(\varepsilon)$

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in\mathsf{B}} x_\alpha \right\| \leq \left\| x - \sum_{\alpha\in\mathsf{B}_{n_0}} x_\alpha \right\| + \left\| \sum_{\alpha\in\mathsf{B}\setminus\mathsf{B}_{n_0}} x_\alpha \right\| \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon\,.$$

(c) „$\Longrightarrow$“: Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir B_n wie oben und setzen $\mathsf{B} := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{B}_n$. Da jedes B_n endlich ist, ist B höchstens abzählbar. Ist $\alpha \notin \mathsf{B}$, so ist $\|x_\alpha\| < \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $x_\alpha = 0$. Die restlichen Aussagen und die umgekehrte Implikation sind nun offensichtlich.