Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 17. März 2011

2. Klausur zu Funktionalanalysis I

1) a) [4 P.] Es seien X, Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist stetig auf X genau dann, wenn für jede offene Menge V in Y die Urbildmenge $U = f^{-1}(V)$ offen in X ist.

   b) [2 P.] Es sei E ein topologischer Vektorraum, U eine offene Menge in E und M eine beliebige Teilmenge von E. Zeigen Sie, dass $M + U$ eine offene Menge in E ist.

2) [4 P.] Es sei E ein normierter Raum. Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, dass die abgeschlossene Einheitskugel in E kompakt ist und skizzieren Sie den Beweis der entsprechenden Aussage.

3) a) [2 P.] Es sei E der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Definieren Sie auf E eine lokalkonvexe Topologie so, dass die Konvergenz bezüglich dieser Topologie mit der punktweisen Konvergenz übereinstimmt.

   b) [3 P.] Zeigen Sie, dass es in E mit der obigen Topologie keine beschränkten Nullumgebungen gibt.

   c) [1 P.] Kann man die obige Topologie auch mit Hilfe einer Norm erzeugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

4) [3 P.] Kann man auf jedem Vektorraum E eine Norm so definieren, dass jedes lineare Funktional ϕ auf E stetig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

5) [3 P.] Es seien E, F topologische Vektorräume und $T \in L(E, F)$ eine offene Abbildung. Zeigen Sie, dass T surjektiv ist.

6) [3 P.] Es sei F der Vektorraum aller finiten Folgen. Kann man auf F eine Norm so definieren, dass F mit dieser Norm ein Banachraum wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

7) a) [5 P.] Formulieren Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen und skizzieren Sie den Beweis.

   b) [4 P.] Es seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Abgeschlossenheit des Graphen von f an und beweisen Sie die entsprechende Aussage.

8) [2 P.] Es sei $z = (z_n) \in \ell^\infty$ und für $1 \leq p \leq \infty$ sei $T_z\colon \ell^p \to \ell^p$ definiert durch $T_z x = (z_n x_n)$ für $x = (x_n) \in \ell^p$. Untersuchen Sie, ob T ein stetiger linearer Operator ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$.

9) [2 P.] Es seien $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und $\phi\colon C[0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(f) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(t_k)\,.$$

Untersuchen Sie, ob ϕ ein stetiges lineares Funktional auf $C[0,1]$ ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|\phi\|$.

10) [4 P.] Für $f \in L^1[0,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mu_n^f := \int_0^1 t^n f(t)\,dt\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (μ_n^f) in c_0 liegt und die Abbildung $T\colon L^1[0,1] \to c_0$ mit $Tf := (\mu_n^f)$ stetig ist. Bestimmen Sie schließlich $\|T\|$.
Hinweis: Denken Sie an den Lebesgueschen Konvergenzsatz.

11) a) [4 P.] Skizzieren Sie den Beweis des folgenden Satzes und erläutern Sie, was das wesentliche Hilfsmittel im Beweis ist: Es sei H ein Innenproduktraum und $M \subset H$ nicht leer, konvex und vollständig. Dann gibt es genau ein $x_0 \in M$ mit $\|x_0\| \leq \|x\|$ für alle $x \in M$.

b) [3 P.] Erläutern Sie, warum der obige Satz eine wesentliche Rolle beim Aufbau der Theorie der Hilberträume spielt.

c) [3 P.] Formulieren Sie den Darstellungssatz von Fréchet-Riesz und skizzieren Sie den Beweis.

12) [3 P.] Wir betrachten den Vektorraum F aller finiten Folgen als Unterraum des Hilbert-Raums ℓ^2. Bestimmen Sie $F^\perp$.

Bearbeitungszeit: 3 Stunden