Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 16. Februar 2011

1. Klausur zu Funktionalanalysis I

1) Es sei E ein topologischer Vektorraum. Zeigen Sie:

   a) [2 P.] Jede Nullumgebung $U \subset E$ ist absorbierend.

   b) [2 P.] Jede kompakte Menge $K \subset E$ ist beschränkt.

   c) [2 P.] Ist $U \subset E$ eine beschränkte Nullumgebung und (δ_n) eine streng monoton fallende Nullfolge, so ist $\mathscr{B} := \{ \delta_n U : n \in \mathbb{N} \}$ eine Nullumgebungsbasis.

2) a) [1 P.] Definieren Sie den Begriff *Halbnorm*.

   b) [1 P.] Definieren Sie den Begriff Minkowski-*Funktional*.

   c) [4 P.] Es sei E ein Vektorraum, p eine Halbnorm auf E und $B := \{ x \in E : p(x) < 1 \}$. Zeigen Sie, dass B absolutkonvex ist und bestimmen Sie das Minkowski-Funktional von B.

3) a) [1 P.] Was ist ein *lokalkonvexer topologischer Vektorraum*?

   b) [2 P.] Wie kann man eine lokalkonvexe Topologie erzeugen?

   c) [2 P.] Kann man jede lokalkonvexe Topologie auf die gleiche Weise wie in (b) erzeugen?

   d) [2 P.] Geben Sie ein Beispiel eines lokalkonvexen topologischen Vektorraums an, der nicht normierbar ist, d.h. dessen Topologie nicht von einer Norm erzeugt werden kann.

4) [2 P.] Kann man auf jedem Vektorraum E eine lokalkonvexe Topologie so definieren, dass jedes lineare Funktional ϕ auf E stetig ist? Falls dies möglich ist, beantworten Sie noch die folgenden beiden Fragen.

   a) [1 P.] Wie kann man die schwächste solche Topologie erzeugen?

   b) [1 P.] Wie kann man die stärkste solche Topologie erzeugen?

5) [2 P.] Es sei E ein topologischer Vektorraum, ϕ ein stetiges lineares Funktional auf E und der Nullraum $\mathscr{N}(E)$ enthalte mindestens einen inneren Punkt. Zeigen Sie, dass dann $\phi = 0$ ist.

6) [2 P.] Es sei $E = C[0,1]$ der Banachraum aller stetigen Funktionen $f \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit der Maximum-Norm und F der Unterraum aller Polynome. Zeigen Sie, dass F von 1. Kategorie in E ist.

7) a) [4 P.] Formulieren Sie den Satz von Hahn-Banach und skizzieren Sie die wesentlichen Beweisschritte.

   b) [2 P.] Was ist die wichtigste Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach? Beweisen Sie die entsprechende Aussage.

8) [2 P.] Es sei E der normierte Raum aller finiten Folgen mit der Supremumnorm versehen. Weiter sei $T\colon E \to E$ definiert durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$. Untersuchen Sie, ob T ein stetiger linearer Operator ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$.

9) Es sei $T\colon \ell^\infty \to c_0$ definiert durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := \big(x_1, \frac{1}{2}\,x_2, \frac{1}{3}\,x_3, \dots\big)$.

   a) [2 P.] Untersuchen Sie, ob T ein stetiger linearer Operator ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$.

   b) [1 P.] Untersuchen Sie, ob T injektiv oder surjektiv ist.

   c) [1 P.] Untersuchen Sie, ob T eine offene Abbildung ist.

10) [3 P.] Es sei $\phi\colon \ell^1 \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \dots) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,.$$

Untersuchen Sie, ob ϕ ein stetiges lineares Funktional auf ℓ^1 ist und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|\phi\|$.

11) Zeigen Sie:

   a) [2 P.] Die Räume ℓ^p mit $1 \le p < \infty$ und c_0 sind separabel.

   b) [2 P.] Die Räume $(\ell^\infty)'$ und ℓ^1 sind nicht isometrisch isomorph.

   c) [3 P.] Die Räume ℓ^1, ℓ^∞ und c_0 sind nicht reflexiv.

12) a) [1 P.] Definieren Sie den Begriff *maximales Orthonormalsystem.*

   b) [1 P.] Definieren Sie den Begriff *vollständiges Orthonormalsystem.*

   c) [4 P.] Wie hängen diese beiden Begriffe miteinander zusammen? Beweisen Sie die entsprechenden Aussagen.

   d) [2 P.] Welche Aussagen gelten über die Existenz solcher Orthonormalsysteme? Beweisen Sie die entsprechenden Aussagen.

Bearbeitungszeit: 3 Stunden