Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

WiSe 2013/14

Funktionalanalysis I

Beweis der Hölderschen Ungleichung

Wir können annehmen, dass $f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in X$.
1. Fall: Es sei $1 < p < \infty$. Wir zeigen zunächst, dass für a, $b \geq 0$ gilt

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \tfrac{a}{p} + \tfrac{b}{q}\,.$$

Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so ist die Ungleichung offenbar richtig. Wir nehmen also an, dass $a > 0$ und $b > 0$. Aus der Konkavität des Logarithmus folgt für $t \in [0,1]$

$$\log\left(ta + (1-t)b\right) \geq t \log a + (1-t) \log b\,.$$

Setzen wir speziell $t := \frac{1}{p}$, so ist $1 - t = \frac{1}{q}$ und daher

$$\log\left(\tfrac{a}{p} + \tfrac{b}{q}\right) \geq \tfrac{1}{p}\,\log a + \tfrac{1}{q}\,\log b = \log\left(a^{1/p} b^{1/q}\right).$$

Anwendung der Exponentialfunktion liefert nun die Behauptung.
Ist $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, so ist $f = 0$ oder $g = 0$ fast überall, also auch $fg = 0$ fast überall, und die Ungleichung offensichtlich richtig. Es seien also $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$. Für $x \in X$ setzen wir nun speziell $a := (\|f\|_p^{-1} f(x))^p$ und $b := (\|g\|_q^{-1} g(x))^q$ und erhalten

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q}\, f(x) g(x) \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\, f(x)^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\, g(x)^q\,, \quad x \in X\,.$$

Integration über x liefert dann schließlich die Behauptung.
2. Fall: Es seien $p = 1$ und $q = \infty$. Dann ist $f(x)g(x) \leq f(x)\|g\|_\infty$ für fast alle $x \in X$ und Integration über x liefert sofort die Behauptung. Den Fall $p = \infty$ und $q = 1$ behandelt man analog.