Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

WiSe 2013/14

Funktionalanalysis I

Lösungen zum 14. Übungsblatt

1) a) Annahme: $(\ell^\infty)'$ und ℓ^1 sind isometrisch isomorph. Nach Aufgabe 3 (a) auf Blatt 13 ist ℓ^1 separabel, also auch $(\ell^\infty)'$. Aus Satz 3.1.8 folgt, dass dann ℓ^∞ separabel ist, was ein Widerspruch zu Aufgabe 3 (b) auf Blatt 13 ist.

b) Nach Aufgabe 1 (a) auf Blatt 13 ist $T\colon \ell^q \to (\ell^p)'$ definiert durch $(*)$ ein isometrischer Isomorphismus. Es sei $x'' \in (\ell^p)''$. Gesucht ist ein $x \in \ell^p$ mit $Jx = x''$, wobei $J = J_{\ell^p}\colon \ell^p \to (\ell^p)''$ die kanonische Einbettung ist. Wir setzen $y'' := x'' \circ T \in (\ell^q)'$. Nach Aufgabe 1 (a) auf Blatt 13 gibt es ein $x = (x_n) \in \ell^p$ mit

$$\langle z, y''\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n\,, \quad z = (z_n) \in \ell^q\,.$$

Dann folgt für $x' \in (\ell^p)'$

$$\langle x', x''\rangle = \langle T^{-1}x', y''\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (T^{-1}x')_n x_n = \langle x, x'\rangle = \langle x', Jx\rangle$$

und somit die Behauptung.

c) (i) ℓ^1 ist nicht reflexiv: Nach Aufgabe 1 (a) auf Blatt 13 ist $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$. Wäre ℓ^1 reflexiv, so wäre $\ell^1 \cong (\ell^\infty)'$, was aber nach (a) nicht der Fall ist.

(ii) ℓ^∞ ist nicht reflexiv: Nach Aufgabe 1 (a) auf Blatt 13 ist $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$. Wäre ℓ^∞ reflexiv, so auch ℓ^1 nach Satz 3.1.3 (b), was aber nach (i) nicht der Fall ist.

(iii) c_0 ist nicht reflexiv: Nach Aufgabe 1 (c) auf Blatt 13 ist $(c_0)' \cong \ell^1$. Wäre c_0 reflexiv, so auch ℓ^1 nach Satz 3.1.3 (b), was aber nach (i) nicht der Fall ist.

2) Offensichtlich ist $\|Tx\|_p = \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$, also T stetig und $\|T\| = 1$. Es ist T sogar eine Isometrie aber nicht surjektiv. T wird auch *Shiftoperator* (*Rechtsshift* oder *Vorwärtsshift*) genannt. Es ist $(\ell^p)' \cong \ell^q$. Wir definieren $T'\colon \ell^q \to \ell^q$ durch $T'(y_1, y_2, y_3, \dots) := (y_2, y_3, y_4, \dots)$ (*Linksshift* oder*Rückwärtsshift*) und zeigen, dass T' der duale Operator von T ist.

Für $y' = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots) \in (\ell^p)' = \ell^q$ und $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^p$ ist

$$\langle Tx, y'\rangle = y'(Tx) = y'(0, x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \eta_{n+1} = (T'y')(x) = \langle x, T'y'\rangle\,.$$

3) a) Wir nehmen an, dass ℓ^p ein HILBERTraum ist. Dann muss die Parallelogrammgleichung gelten, d.h.

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)\,.$$

Setzen wir speziell $x = (1,0,0,0,\dots)$ und $y = (0,1,0,0,0,\dots)$, so folgt im Fall $p < \infty$

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2(1+1) \quad \text{oder äquivalent} \quad 2^{2/p} = 2\,.$$

Dies ist aber nur für $p = 2$ möglich. Für $p = \infty$ ergibt sich der Widerspruch $2 = 4$.

b) Falls $C[0,1]$ mit der Maximumnorm ein HILBERTraum wäre, so müsste wieder die Parallelogrammgleichung gelten, d.h.

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)\,.$$

Setzen wir jedoch speziell

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{4}\,, \\ -4x+2 & \text{für } \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

und

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ 4x-2 & \text{für } \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4}\,, \\ 1 & \text{für } \frac{3}{4} \le t \le 1\,, \end{cases}$$

so erhalten wir den Widerspruch $2 = 4$.

4) Wir zeigen allgemeiner: Ist H ein Innenproduktraum und M ein dichter Unterraum von H, so ist $M^\perp = \{0\}$.
Beweis: Es sei $x \in M^\perp$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to x$. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts folgt $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$. Da $\langle x_n, x\rangle = 0$ für alle n, ist $\langle x, x\rangle = 0$ und damit $x = 0$.

Nun sei speziell $H = C[0,1]$ mit dem angegebenen Skalarprodukt und M der Unterraum aller Polynome. Nach dem WEIERSTRASSschen Approximationssatz ist M dicht in $C[0,1]$ bezüglich der Maximumnorm, und da $\|f\|_2 \le \|f\|_\infty$ für alle $f \in C[0,1]$, ist M auch dicht in H. Also folgt aus dem oben gezeigten $M^\perp = \{0\}$.

Dieses Beispiel zeigt, dass man in Satz 4.1.6 die Voraussetzung der Vollständigkeit von M im Allgemeinen nicht weglassen kann.