Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 30. Januar 2014

Funktionalanalysis I

14. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Keine **Abgabe**

1) a) Zeigen Sie, dass $(\ell^\infty)'$ und ℓ^1 nicht isometrisch isomorph sind.

   b) Zeigen Sie, dass die Räume ℓ^p für $1 < p < \infty$ reflexiv sind.

   c) Zeigen Sie, dass die Räume ℓ^1, ℓ^∞ und c_0 nicht reflexiv sind.

2) Für $1 \leq p < \infty$ sei $T\colon \ell^p \to \ell^p$ definiert durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ für $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^p$. Zeigen Sie, dass $T \in L(\ell^p)$, berechnen Sie $\|T\|$ und bestimmen Sie den dualen Operator T'.

3) a) Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $p \neq 2$. Zeigen Sie, dass ℓ^p kein Hilbertraum ist, d.h. es gibt kein Skalarprodukt auf ℓ^p, das die Norm $\|\cdot\|_p$ von ℓ^p erzeugt.

   b) Zeigen Sie, dass $C[0,1]$ mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ kein Hilbertraum ist.

   Hinweis: Beachten Sie die Parallelogrammgleichung.

4) Es sei H der Innenproduktraum aller $f \in C[0,1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt\,, \quad f, g \in C[0,1]$$

   und M der Unterraum aller Polynome. Bestimmen Sie $M^\perp$.
   Hinweis: Verwenden Sie den Weierstrassschen Approximationssatz: Zu jedem $f \in C[0,1]$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom p mit $|f(t) - p(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in [0,1]$.
   Zusatz: Versuchen Sie, das Ergebnis zu verallgemeinern.