TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DIPL.-MATH. PATRICK MEIER

Dortmund, 23. Januar 2014

Funktionalanalysis I

13. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 28.01.2014 bzw. Mittwoch, 29.01.2014 in den Übungen

1) Sind E und F normierte Räume, so heißt eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ eine *isometrische Einbettung*, wenn $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in E$ gilt. Dann ist T insbesondere injektiv und man kann E als Unterraum von F auffassen.

   Nun sei $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $T\colon \ell^q \to (\ell^p)'$ definiert durch

   $$\langle y, Tx \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\,, \quad x = (x_n) \in \ell^q,\ y = (y_n) \in \ell^p\,. \tag{$*$}$$

   Zeigen Sie:

   a) Für $p < \infty$ ist T ein isometrischer Isomorphismus. Man schreibt dafür $(\ell^p)' \cong \ell^q$. *Hinweis*: Nutzen Sie zum Nachweis der Surjektivität von T aus, dass der Raum F der finiten Folgen dicht in ℓ^p ist.

   b) Für $p = \infty$ ist $T\colon \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ eine isometrische Einbettung.

   c) Die Abbildungsvorschrift $(*)$ liefert einen isometrischen Isomorphismus von ℓ^1 auf $(c_0)'$, also $(c_0)' \cong \ell^1$.

2) Beweisen Sie Lemma 3.1.7: Ein topologischer Vektorraum E ist separabel genau dann, wenn es eine Folge (x_n) in E gibt mit $\overline{\langle\, x_n : n \in \mathbb{N}\,\rangle} = E$.

3) a) Zeigen Sie, dass die Räume ℓ^p für $1 \le p < \infty$ und c_0 separabel sind.

   b) Zeigen Sie, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.

   c) Zeigen Sie, dass jeder separable normierte Raum E isometrisch isomorph zu einem Unterraum von ℓ^∞ ist.

4) Es sei $E = C[0,1]$ der metrische Vektorraum mit der Metrik

   $$d(f,g) := \int_0^1 \min\{1, |f(t) - g(t)|\}\, dt$$

   (siehe Aufgabe 2 auf Blatt 8 und Aufgabe 1 auf Blatt 9). Weiter sei M ein Unterraum von E mit $\operatorname{codim} M < \infty$, wobei $\operatorname{codim} M := \dim E/M$. Zeigen Sie, dass M dicht in E ist.