Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 16. Januar 2014

Funktionalanalysis I

12. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 21.01.2014 bzw. Mittwoch, 22.01.2014 in den Übungen

1) Es sei E der Banachraum aller beschränkten Folgen reeller Zahlen. Der *Shiftoperator* $T\colon E \to E$ ist definiert durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$.

   a) Zeigen Sie, dass es ein $\Phi \in E^*$ mit folgenden Eigenschaften gibt:
   (i) $\Phi(Tx) = \Phi(x)$ für alle $x \in E$.
   (ii) Ist $x = (x_n) \in E$ mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\Phi(x) \geq 0$.
   (iii) Ist $\eta := (1, 1, 1, \dots)$, so ist $\Phi(\eta) = 1$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass durch $p(x) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ eine sublineare Abbildung $p\colon E \to \mathbb{R}$ definiert wird und $p(u) \geq 0$ für alle $u \in U := \{\, Tx - x : x \in E \,\}$. Wenden Sie den Satz von Hahn-Banach an.

   b) Es sei $\Phi \in E^*$ mit den Eigenschaften (i) – (iii). Zeigen Sie, dass dann Φ zusätzlich erfüllt: (Ein solches Φ nennt man auch *Banach-Limes*.)
   (iv) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \Phi(x) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ für $x = (x_n) \in E$ und $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ für $x \in c$.
   (v) $\Phi \in E'$ und $\|\Phi\| = 1$.

2) Es sei $E := C[0,1]$ und $K := \{\, f \in E : \|f\|_\infty \leq 1 \,\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in E. Zeigen Sie: Es gibt ein $\Phi \in E'$ so, dass $\Phi(K)$ eine offene Menge in $\mathbb{C}$ ist.
   Anleitung: Definieren Sie $\Phi\colon E \to \mathbb{C}$ durch
$$\Phi(f) := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\,, \quad f \in E\,,$$
   wobei $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert ist durch $g(t) := -1$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und $g(t) := 1$ für $\frac{1}{2} < t \leq 1$. Zeigen Sie, dass $\Phi \in E'$ mit $\|\Phi\| = 1$ und folgern Sie hieraus $\Phi(K) = \mathbb{D} := \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \,\}$.

3) Es sei E ein normierter Raum, A eine Indexmenge, $\{ x_\alpha : \alpha \in \mathsf{A} \} \subset E$ linear unabhängig und $c_\alpha \in \mathbb{K}$ für $\alpha \in \mathsf{A}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\Phi \in E'$ mit $\Phi(x_\alpha) = c_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathsf{A}$ genau dann, wenn es eine Konstante $c < \infty$ gibt so, dass für alle endlichen Teilmengen $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ und alle $a_\beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\left| \sum_{\beta \in \mathsf{B}} a_\beta c_\beta \right| \leq c \left\| \sum_{\beta \in \mathsf{B}} a_\beta x_\beta \right\| .$$

4) Es seien E, F normierte Räume, $E \neq \{0\}$ und $L(E,F)$ ein Banachraum. Zeigen Sie, dass dann auch F ein Banachraum ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Hahn-Banach (bzw. eine geeignete Folgerung daraus).