Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 9. Januar 2014

Funktionalanalysis I

11. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 14.01.2014 bzw. Mittwoch, 15.01.2014 in den Übungen

1) Eine Folge (x_n) komplexer Zahlen heißt *finit*, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = 0$ für alle $n \geq N$. Es sei E der Unterraum von ℓ^∞, der aus allen finiten Folgen besteht. Weiterhin sei $T\colon E \to E$ definiert durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$. Zeigen Sie, dass T unstetig ist, aber als punktweiser Grenzwert einer Folge (T_n) in $L(E)$ dargestellt werden kann. Ist E ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞?

2) Betrachten Sie die Folgenräume ℓ^1 und ℓ^2. Da $\ell^1 \subset \ell^2$ kann man ℓ^1 mit der Teilraumtopologie von ℓ^2 versehen. Zeigen Sie, dass ℓ^1 dicht aber von 1. Kategorie in ℓ^2 ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{id}\colon (\ell^1, \|\cdot\|_1) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ stetig aber nicht surjektiv ist und benutzen Sie den Satz von der offenen Abbildung.

3) Ein topologischer Vektorraum E besitzt die Heine-Borel-*Eigenschaft*, wenn jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von E kompakt ist.

   a) Zeigen Sie, dass $C(\Omega)$ (vgl. Beispiel 1.7.10) die Heine-Borel-Eigenschaft nicht besitzt.

   b) Zeigen Sie, dass $H(\Omega)$ (vgl. Beispiel 1.7.11) die Heine-Borel-Eigenschaft besitzt.
   Hinweis: Dieser Aufgabenteil ist nur für Studierende gedacht, die Kenntnisse in Funktionentheorie 1 und 2 haben.

4) Es seien E, F, G Vektorräume und $B\colon E \times F \to G$ eine Abbildung. Für $x \in E$ definieren wir die Abbildung $B_x\colon F \to G$ durch $B_x(y) := B(x, y)$ $(y \in F)$, und für $y \in F$ die Abbildung $B^y\colon E \to G$ durch $B^y(x) := B(x, y)$ $(x \in E)$. B heißt *bilinear*, falls B_x und B^y für alle $x \in E$ und $y \in F$ linear sind. Sind E, F, G topologische Vektorräume, so heißt B *partiell stetig*, falls B_x und B^y für alle $x \in E$ und $y \in F$ stetig sind. Ist B stetig (bezüglich der Produkttopologie auf $E \times F$), so ist klar, dass B auch partiell stetig ist. Beweisen Sie die folgende Umkehrung dieser Aussage:
Es seien E, F, G Banachräume und $B\colon E \times F \to G$ bilinear und partiell stetig. Dann ist B stetig.
Hinweis: Benutzen Sie das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.