Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 19. Dezember 2013

Funktionalanalysis I

10. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 07.01.2014 bzw. Mittwoch, 08.01.2014 in den Übungen

1) a) Es sei $0 < \varepsilon < 1$. Konstruieren Sie eine nirgends dichte Menge $M \subset [0,1]$ mit $\lambda(M) \geq 1 - \varepsilon$, wobei λ das eindimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet.

   b) Zeigen Sie, dass sich das Intervall $[0,1]$ derart in zwei disjunkte Teilmengen A und B zerlegen lässt, dass A mager und B eine Nullmenge ist.

   c) Das Spiel von Banach-Mazur: Der Spieler $\mathscr{A}$ erhält eine beliebige Teilmenge A des Intervalls $I_0 = [0,1]$, während der Spieler $\mathscr{B}$ die komplementäre Menge $B = [0,1] \setminus A$ erhält. Nun wird wie folgt gespielt. $\mathscr{A}$ wählt ein abgeschlossenes Intervall $I_1 \subset I_0$; dann wählt $\mathscr{B}$ ein abgeschlossenes Intervall $I_2 \subset I_1$; danach wählt $\mathscr{A}$ ein abgeschlossenes Intervall $I_3 \subset I_2$ und so fort. Ist $A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, so gewinnt $\mathscr{A}$, andernfalls $\mathscr{B}$. Zeigen Sie: Ist A mager, so gibt es eine Strategie mit der $\mathscr{B}$ sicher gewinnt.

2) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ setzen wir

$$\omega_f(\delta; x) := \sup_{|t-x|<\delta} f(t) - \inf_{|t-x|<\delta} f(t) \in [0, \infty] \,.$$

   Zeigen Sie:

   a) Der Grenzwert $\omega_f(x) := \lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta; x) \in [0, \infty]$ existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$, und f ist stetig in x genau dann, wenn $\omega_f(x) = 0$.

   b) Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist eine F_σ-Menge, d.h. eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.

   c) Zu jeder F_σ-Menge $M \subset \mathbb{R}$ gibt es eine beschränkte Funktion f, deren Menge der Unstetigkeitsstellen gleich M ist.

   d) Ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f' mager.

Bitte wenden!

3) a) Es sei E ein vollständiger metrischer Vektorraum mit $\dim E = \infty$. Zeigen Sie, dass E eine überabzählbare (algebraische) Basis besitzt.

b) Es sei E der Vektorraum aller Polynome $p\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ und $\|\cdot\|$ eine (beliebige) Norm auf E. Zeigen Sie, dass $(E, \|\cdot\|)$ kein Banachraum ist.

4) Es sei E ein topologischer Vektorraum von 2. Kategorie in sich, $A \subset E$ abgeschlossen, konvex und absorbierend. Zeigen Sie, dass A eine Nullumgebung $U \subset E$ enthält.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!