Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 12. Dezember 2013

Funktionalanalysis I

9. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 17.12.2013 bzw. Mittwoch, 18.12.2013 in den Übungen

1) Es sei $E := C[0,1]$ mit der Metrik

$$d(f,g) := \int_0^1 \min\{1, |f(t) - g(t)|\}\, dt$$

aus Aufgabe 2 auf Blatt 8. Zeigen Sie:

a) $\varnothing$ und E sind die einzigen konvexen, offenen Mengen in E. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

i. Konstruieren Sie zunächst zu $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ (hinreichend klein) Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in C[0,1]$ mit $g_k(t) = 0$ für $t \in [0,1] \setminus \left[\frac{k-1}{n} - \varepsilon, \frac{k}{n} + \varepsilon\right]$, $k = 1, \ldots, n$ und $g_1(t) + \cdots + g_n(t) = 1$ für alle $t \in [0,1]$.

ii. Ist $C \subset E$ eine konvexe, offene Menge mit $0 \in C$, so gibt es ein $r > 0$ mit $B_r = \{\, f \in E : d(f,0) < r \,\} \subset C$. Wählen Sie $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ mit $\frac{1}{n} + 2\varepsilon < r$ und zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass man jedes $f \in E$ als Konvexkombination von Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in B_r$ darstellen kann.

b) Ist F ein lokal konvexer topologischer Vektorraum und $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung, so ist entweder $T = 0$ oder T nicht stetig. Speziell ist $(E,d)' = \{0\}$.

2) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge.

a) Zeigen Sie, dass es eine *Ausschöpfungsfolge* (K_n) von Ω gibt, d.h. eine Folge kompakter Mengen $K_n \subset \Omega$ mit $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ und $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Funktion $\operatorname{dist}(\cdot, \Omega^c)\colon \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$, wobei $\Omega^c := \mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

b) Zeigen Sie: Ist (K_n) eine Ausschöpfungsfolge von Ω, so gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_n$.

c) Zeigen Sie, dass die in Beispiel 1.7.10 konstruierte Topologie von $C(\Omega)$ nicht von der speziell gewählten Ausschöpfungsfolge abhängt.

3) Bestimmen Sie die Quotientennorm im Raum ℓ^∞ / c_0.

4) Zeigen Sie: Ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum E ist normierbar genau dann, wenn E lokalbeschränkt ist.