TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DIPL.-MATH. PATRICK MEIER

Dortmund, 5. Dezember 2013

Funktionalanalysis I

8. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 10.12.2013 bzw. Mittwoch, 11.12.2013 in den Übungen

1) Es sei $(E, \mathscr{T})$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $\mathscr{B}$ eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen für $\mathscr{T}$. Nach Satz 1.5.4 erzeugt dann $\mathscr{B}$ eine punktetrennende Familie $\mathscr{P}$ stetiger Halbnormen auf E. Diese Familie $\mathscr{P}$ induziert andererseits eine Topologie $\mathscr{T}_1$ auf E gemäß Satz 1.5.5. Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}$.

2) Es sei $E := C[0,1]$. Für $f,\, g \in E$ sei

$$d(f,g) := \int_0^1 \min\{1, |f(t) - g(t)|\}\, dt\,.$$

Zeigen Sie, dass d eine invariante Metrik auf E ist und eine Vektorraumtopologie $\mathscr{S}$ auf E induziert. Weiterhin sei $\mathscr{T}$ die durch die Halbnormenfamilie $\mathscr{P} := \{\, p_t : t \in [0,1]\,\}$ mit $p_t(f) := |f(t)|$ $(f \in E)$ erzeugte lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf E.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{id}\colon (E, \mathscr{T}) \to (E, \mathscr{S})$ zwar folgenstetig aber nicht stetig ist. Gibt es eine Metrik ϱ auf E, die die Topologie $\mathscr{T}$ induziert?

b) Zeigen Sie, dass jede $\mathscr{T}$-beschränkte Menge M in E auch $\mathscr{S}$-beschränkt ist und damit die Abbildung $\mathrm{id}\colon (E, \mathscr{T}) \to (E, \mathscr{S})$ beschränkt ist.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Implikation (d) $\implies$ (b) in Satz 1.4.5 auch ohne Zusatzvoraussetzung an E gilt.

c) Zeigen Sie: Eine Folge (f_n) konvergiert gegen ein f in (E, d), d.h. $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn (f_n) *dem Maße nach gegen f konvergiert*, d.h. für jedes $\delta > 0$ gilt $\lambda(\{\, t \in [0,1] : |f_n(t) - f(t)| \geq \delta\,\}) \to 0$ $(n \to \infty)$, wobei λ das (eindimensionale) LEBESGUE-Maß auf $[0,1]$ bezeichnet.

d) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\Phi(f) := \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)\,, \quad f \in E$$

ein stetiges lineares Funktional auf $(E, \mathscr{T})$ definiert wird und umgekehrt jedes stetige lineare Funktional auf $(E, \mathscr{T})$ von dieser Form ist.

Bitte wenden!

3) Es sei $E := C(\mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 1.7.10). Es ist E ein FRÉCHETraum mit der Metrik

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \|f-g\|_n\},$$

wobei $\|f\|_n = \max\{\, |f(t)| : |t| \le n \,\}$. Die Kugeln $B_r := \{\, f \in E : d(f,0) < r \,\}$ bilden eine Nullumgebungsbasis der Topologie von E. Es soll nun gezeigt werden, dass diese Kugeln für kein $r \in (0,1)$ konvex sind. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

a) Es seien E ein topologischer Vektorraum, F ein Unterraum von E, $C \subset E$ konvex und offen und $F \subset C$. Zeigen Sie, dass dann $c + F \subset C$ für alle $c \in C$.

b) Es sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $2^{-N} < r$ und E_N die Menge aller $f \in E$ mit $f(t) = 0$ für alle $t \in [-N, N]$. Zeigen Sie, dass E_N ein Unterraum von E ist und $E_N \subset B_r$.

c) Für $\varrho \in (0, r)$ sei f_ϱ die konstante Funktion mit $f_\varrho \equiv \varrho$. Zeigen Sie, dass $f_\varrho \in B_r$.

d) Zeigen Sie schließlich, dass B_r für $0 < r < 1$ nicht konvex ist.

4) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex. Zeigen Sie, dass die Abbildung $D^\alpha \colon C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ mit $f \mapsto D^\alpha f$ linear und stetig ist.