Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 28. November 2013

Funktionalanalysis I

7. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 03.12.2013 bzw. Mittwoch, 04.12.2013 in den Übungen

1) Es sei E ein Vektorraum und $\mathscr{P}$ eine Familie von Halbnormen auf E. Diese erzeugt gemäß Satz 1.5.5 eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie $\mathscr{T}$ auf E. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   a) $(E, \mathscr{T})$ ist ein Hausdorff-Raum.

   b) $\mathscr{P}$ ist punktetrennend auf E.

   c) Es gibt eine Nullumgebungsbasis $\mathscr{B}$ mit $\bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} U = \{0\}$.

2) Es sei E ein Vektorraum und $\mathscr{P}$ die Menge aller Halbnormen auf E.

   a) Zeigen Sie, dass jedes $\Phi \in E^*$ eine Halbnorm auf E erzeugt und folgern Sie daraus, dass $\mathscr{P}$ punktetrennend auf E ist. Damit wird E gemäß Satz 1.5.5 zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

   b) Es sei F ein weiterer lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass T stetig ist. Insbesondere ist also $E' = E^*$. Hieraus folgt, dass es keine Norm auf E gibt, die die Topologie von E induziert, falls $\dim E = \infty$. Warum? Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 3 (b) auf Blatt 5.

   c) Zeigen Sie, dass jeder Unterraum von E abgeschlossen ist. Tipp: Benutzen Sie (b).

3) Es seien E, F topologische Vektorräume, $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung, N ein abgeschlossener Unterraum von E mit $N \subset \mathscr{N}(T)$ und $\pi\colon E \to E/N$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie:

   a) Es gibt genau eine Abbildung $f\colon E/N \to F$ mit $T = f \circ \pi$, und f ist linear.

   b) f ist stetig genau dann, wenn T stetig ist.

   c) f ist offen genau dann, wenn T offen ist.

4) Es seien E, F topologische Vektorräume und $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

   a) T ist offen genau dann, wenn es zu jeder Nullumgebung U in E eine Nullumgebung V in F gibt mit $V \subset T(U)$.

   b) Ist zusätzlich $\dim F < \infty$ und T surjektiv, so ist T offen.

   c) Ist zusätzlich $\dim F < \infty$, T surjektiv und $\mathscr{N}(T)$ abgeschlossen, so ist T stetig. Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 3.