TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DIPL.-MATH. PATRICK MEIER

Dortmund, 21. November 2013

Funktionalanalysis I

6. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 26.11.2013 bzw. Mittwoch, 27.11.2013 in den Übungen

1) Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, dessen Topologie von einer Halbnormenfamilie $\mathscr{P}$ erzeugt wird. Zeigen Sie: Eine Folge (x_n) in E konvergiert gegen $x \in E$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n - x) = 0$ für alle $p \in \mathscr{P}$.

2) Es sei E der Vektorraum aller Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Für $t \in [0,1]$ definieren wir

$$p_t(f) := |f(t)|\,, \quad f \in E$$

und $\mathscr{P} := \{\, p_t : t \in [0,1]\,\}$. Zeigen Sie:

a) $\mathscr{P}$ ist eine punktetrennende Familie von Halbnormen auf E, die gemäß Satz 1.5.5 eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie $\mathscr{T}$ auf E erzeugt.

b) Eine Folge (f_n) in E ist in $(E, \mathscr{T})$ konvergent genau dann, wenn sie auf $[0,1]$ punktweise konvergiert. Daher heißt $\mathscr{T}$ auch die *Topologie der punktweisen Konvergenz.*

c) Die Aussage (b) in Lemma 1.4.4 gilt in $(E, \mathscr{T})$ im Allgemeinen nicht. Hieraus folgt, dass es keine Metrik d auf E gibt, die die Topologie $\mathscr{T}$ induziert.
Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis) die Tatsache, dass die Menge aller Nullfolgen komplexer Zahlen und das Intervall $[0,1]$ gleichmächtig sind.

3) Es sei E ein Vektorraum und $\mathscr{P}$ eine punktetrennende Familie von Halbnormen auf E. Weiter sei $\mathscr{Q}$ die kleinste Familie von Halbnormen auf E, die $\mathscr{P}$ enthält und abgeschlossen unter max ist, d.h. sind p_1, $p_2 \in \mathscr{Q}$ und $p := \max\{p_1, p_2\}$, so ist auch $p \in \mathscr{Q}$. Eine solche Familie von Halbnormen heißt *saturiert.* Dann erzeugen $\mathscr{P}$ und $\mathscr{Q}$ gemäß Satz 1.5.5 lokalkonvexe Vektorraumtopologien $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ und $\mathscr{T}_{\mathscr{Q}}$ auf E. Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}_{\mathscr{P}} = \mathscr{T}_{\mathscr{Q}}$. Welchen Vorteil hat $\mathscr{Q}$ gegenüber $\mathscr{P}$?

4) Es sei E der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon (0,1) \to \mathbb{C}$. Für $f \in E$ und $r > 0$ sei

$$U_r(f) := \left\{ g \in E : \sup_{t\in(0,1)} |g(t) - f(t)| < r \right\}.$$

Wir nennen eine Menge $U \subset E$ *offen*, wenn es zu jedem $f \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $U_r(f) \subset U$. Zeigen Sie, dass dadurch eine HAUSDORFF-Topologie auf E definiert wird. Ist diese Topologie eine Vektorraumtopologie?