Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 14. November 2013

Funktionalanalysis I

5. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 19.11.2013 bzw. Mittwoch, 20.11.2013 in den Übungen

1) Es sei (E, d) ein metrischer Raum. Für $x_0 \in E$ und $r > 0$ seien
$$U_r(x_0) := \{\, x \in E : d(x, x_0) < r \,\} \quad \text{und} \quad B_r(x_0) := \{\, x \in E : d(x, x_0) \leq r \,\}\,.$$
Weiter sei $\overline{U_r(x_0)}$ der Abschluss von $U_r(x_0)$. Zeigen Sie, dass $\overline{U_r(x_0)} \subset B_r(x_0)$. Geben Sie ein Beispiel an, dass im Allgemeinen $\overline{U_r(x_0)} = B_r(x_0)$ nicht gilt. Welche Aussagen gelten für das Innere $(U_r(x_0))^\circ$ und den Rand $\partial U_r(x_0)$ von $U_r(x_0)$?

   Nun sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und d die von der Norm $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik. Zeigen Sie, dass $\overline{U_r(x_0)} = B_r(x_0)$. Welche Aussagen gelten für das Innere $(U_r(x_0))^\circ$ und den Rand $\partial U_r(x_0)$ von $U_r(x_0)$?

2) Es sei E ein Vektorraum und $\mathscr{T}$ eine Topologie auf E so, dass die Addition und Skalarmultiplikation stetig sind. Zu jedem $x \in E$ mit $x \neq 0$ existiere eine Nullumgebung U_x mit $x \notin U_x$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{T}$ eine Hausdorff-Topologie und damit $(E, \mathscr{T})$ ein topologischer Vektorraum ist.

3) a) Es seien E, F topologische Vektorräume, $\dim E < \infty$ und $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass T stetig ist.

   b) Es sei E ein normierter Raum mit $\dim E = \infty$. Zeigen Sie, dass es ein unstetiges $\Phi \in E^*$ gibt.
   Hinweis: Konstruieren Sie Φ mit Hilfe einer geeignet gewählten (algebraischen) Basis von E.

4) Es sei E ein topologischer Vektorraum, M ein dichter Unterraum von E, F ein vollständiger metrischer Vektorraum und $T\colon M \to F$ linear und stetig. Zeigen Sie, dass T zu einer stetigen, linearen Abbildung $\widetilde{T}\colon E \to F$ fortgesetzt werden kann. Ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt?
   Anleitung: Wählen Sie eine Folge (U_n) kreisförmiger Nullumgebungen in E mit $U_n + U_n \subset U_{n-1}$ und $d(Tx, 0) < 2^{-n}$ für alle $x \in M \cap U_n$. Zu $x \in E$ sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in (x + U_n) \cap M$. Zeigen Sie, dass dann (Tx_n) eine Cauchy-Folge in F ist und definieren Sie $\widetilde{T}x$ als deren Grenzwert. Zeigen Sie schließlich, dass dadurch $\widetilde{T}$ wohldefiniert ist (d.h. unabhängig von der gewählten Folge (x_n) ist) und die gewünschten Eigenschaften hat.