Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 7. November 2013

Funktionalanalysis I

4. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 12.11.2013 bzw. Mittwoch, 13.11.2013 in den Übungen

1) Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ dieselbe Topologie induzieren.
   Anleitung: Zeigen Sie, dass es zu jeder Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ positive Konstanten m und M gibt mit $m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm ist. Zeigen Sie dazu, dass $\|\cdot\|\colon (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist und daher auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ Minimum und Maximum annimmt.

2) a) Es sei E ein Vektorraum und $A \subset E$. Dann ist die *konvexe Hülle* von A definiert durch
   $$\operatorname{conv} A := \bigcap \{\, C \subset E : C \supset A \text{ und } C \text{ konvex} \,\}.$$
   Zeigen Sie, dass $\operatorname{conv} A$ die Menge aller *Konvexkombinationen* von Elementen aus A ist, d.h.
   $$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} t_k x_k : x_1, \ldots, x_n \in A,\ t_1, \ldots, t_n \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} t_k = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass für eine konvexe Menge $K \subset E$ und $x_0, \ldots, x_n \in K$ jede Konvexkombination $t_0x_0+\cdots+t_nx_n$ der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ in K liegt. Führen Sie den Beweis mit Induktion nach n.

   b) Nun sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$. Zeigen Sie:
      i) Ist A offen, so auch $\operatorname{conv} A$.
      ii) Ist E lokalkonvex und A beschränkt, so auch $\operatorname{conv} A$.

3) Es sei E ein topologischer Vektorraum und F ein echter Unterraum von E, d.h. $F \neq E$. Zeigen Sie, dass $\mathring{F} = \emptyset$.

4) Es seien E, F Vektorräume und $T\colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

   a) Ist $C \subset E$ konvex oder kreisförmig, so auch $T(C)$.

   b) Ist $D \subset F$ konvex oder kreisförmig, so auch $T^{-1}(D)$.