Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 31. Oktober 2013

Funktionalanalysis I

3. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 05.11.2013 bzw. Mittwoch, 06.11.2013 in den Übungen

1) Es seien X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorff-Raum, f, $g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen und M eine dichte Teilmenge von X mit $f(m) = g(m)$ für alle $m \in M$. Zeigen Sie $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

2) Es sei E ein Vektorraum und A, $B \subset E$. Zeigen Sie:

   a) $2A \subset A + A$. Gilt sogar $2A = A + A$?

   b) A ist konvex. $\iff$ $(s+t)A = sA + tA$ für alle s, $t > 0$.

   c) Die Vereinigung und der Durchschnitt von kreisförmigen Mengen ist kreisförmig.

   d) Der Durchschnitt von konvexen Mengen ist konvex.

   e) Sind A, B konvex oder kreisförmig, so auch $A + B$.

3) Ist die diskrete Topologie eine Vektorraumtopologie?

4) Es sei E ein topologischer Vektorraum und A, B, $U \subset E$.

   a) Zeigen Sie: Ist U offen, so ist $A + U$ offen.

   b) Zeigen Sie: Sind A, B beschränkt oder kompakt, so auch $A + B$.

   c) Zeigen Sie: Ist A kompakt und B abgeschlossen, so ist $A + B$ abgeschlossen. Gilt dies auch, wenn A nur abgeschlossen ist?

   d) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass das Innere einer kreisförmigen Menge im Allgemeinen nicht kreisförmig sein muss.

   e) Was ändert sich, wenn man die Definition 1.2.6 der Beschränktheit wie folgt abändert? Eine Menge $A \subset E$ heißt beschränkt, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein $t > 0$ gibt mit $A \subset tU$.