Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 24. Oktober 2013

Funktionalanalysis I

2. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 29.10.2013 bzw. Mittwoch, 30.10.2013 in den Übungen

1) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei (X_j, d_j) ein metrischer Raum und $\Pi := \prod_{j=1}^{\infty} X_j$. Wir definieren $d\colon \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min\{1, d_j(x_j, y_j)\}, \quad x = (x_j),\ y = (y_j) \in \Pi.$$

Zeigen Sie:

a) d ist eine Metrik auf Π.

b) Eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty} = \left((x_j^{(k)})\right)_{k=1}^{\infty}$ in Π ist konvergent gegen $x = (x_j) \in \Pi$ genau dann, wenn für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $\left(x_j^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ in X_j gegen x_j konvergiert.

c) Ist jedes X_j ein vollständiger metrischer Raum, so ist auch Π ein vollständiger metrischer Raum.

2) Beweisen Sie Satz 1.1.10: Es seien X, Y, Z topologische Räume und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Ist f stetig in $x_0 \in X$ und g stetig in $f(x_0) \in Y$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

b) Sind f und g stetig, so ist $g \circ f$ stetig.

3) Es sei X eine unendliche Menge und $\mathscr{T}$ die Topologie aus Beispiel 1.1.4 (5). Ist der Raum $(X, \mathscr{T})$ kompakt?

4) Es sei (X,d) ein metrischer Raum, A, $B \subset X$ nichtleer, A kompakt, B abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{dist}(A,B) > 0$. Gilt diese Aussage auch noch, wenn A nur abgeschlossen ist?