Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Patrick Meier

Dortmund, 17. Oktober 2013

Funktionalanalysis I

1. Übungsblatt, WiSe 2013/14

Abgabe bis Dienstag, 22.10.2013 in den Übungen

1) a) Es sei X ein Hausdorff-Raum und (x_n) eine konvergente Folge in X. Zeigen Sie, dass der Grenzwert eindeutig bestimmt ist. Gilt diese Aussage auch noch, wenn X nur ein topologischer Raum ist?

   b) Untersuchen Sie die Konvergenz von Folgen in der diskreten und in der indiskreten Topologie.

   c) Zeigen Sie, dass die in Beispiel 1.1.4 (5) definierte Topologie tatsächlich eine Topologie ist. Untersuchen Sie die Konvergenz von Folgen in diesem topologischen Raum.

2) Für x, $y \in \mathbb{R}$ sei $d(x,y) := |x-y|$ und $\varrho(x,y) := |\phi(x) - \phi(y)|$, wobei $\phi(x) := \frac{x}{1+|x|}$. Zeigen Sie, dass d und ϱ Metriken auf $\mathbb{R}$ sind, die dieselbe Topologie induzieren obwohl d vollständig aber ϱ nicht vollständig ist.

3) Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

   a) Es gibt eine Metrik ϱ auf X so, dass $\varrho(x,y) \leq 1$ für alle x, $y \in X$ und ϱ die gleiche Topologie auf X induziert wie d.

   b) Ist $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$, so gilt

$$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leq d(x,y)$$

   für alle x, $y \in X$ und

$$\overline{A} = \{\, x \in X : \operatorname{dist}(x,A) = 0 \,\}.$$

4) Es sei X ein topologischer Raum und $E \subset X$. Zeigen Sie:

   a) $\overline{X \setminus E} = X \setminus \mathring{E}$.

   b) $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$.

   c) E ist abgeschlossen genau dann, wenn $\partial E \subset E$.