ÜBUNGSBLATT 5

AUFGABE: Übungen 1 und 2

Übung 1. Gebe einen direkten Beweis für den folgenden Fakt.

$A \in \mathbb{K}^{m\times N}$ hat die Nullraumeigenschaft der Ordnung $s \in \bar{N} \Rightarrow \ker A \cap \mathbb{K}^N_{2s} = \{0\}$.

Übung 2. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ und $0 < c < 1$. Beweise dass, die folgende äquivalent sind.

(i) $\|v_S\|_1 \leq \|v_{S^c}\|_1 - c\|v\|_1$ für alle $v \in \ker A$ und für alle $S \subset \bar{N}$ mit $|S| \leq s$;
(ii) $\|x\|_1 \leq \|z\|_1 - c\|x - z\|_1$ $\forall$ s-dünner Vektor $x \in \mathbb{C}^N$ und $\forall$ $z \in \mathbb{C}^N$ mit $Az = Ax$.

Übung 3. Beweise den folgende Satz.

Satz: Gegeben $A \in \mathbb{R}^{m\times N}$, $x \in \mathbb{R}^N$, nehmen wir an dass,

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\ S \subset \bar{N} \text{ mit } |S| \leq s, \quad \|v_S\|_1 \leq c\|v_{S^c}\|_1 + d\|Av\|_2$$

mit Konstanten $0 < c < 1$ und $d > 0$. Sei x^* eine Lösung von $(P_{1,\epsilon})$ ($x^* = \operatorname{argmin}_{z\in\mathbb{R}^N} \|z\|_1$ unter NB $\|Ax - y\|_2 \leq \epsilon$). Sei $x \in \mathbb{R}^N$ ein s-dünner Vektor und $y \in \mathbb{R}^m$ so dass $\|Ax - y\|_2 \leq \epsilon$. Dann, gilt

$$\|x - x^*\|_1 \leq \frac{4d}{1-c}\epsilon.$$