ÜBUNGSBLATT 4

AUFGABE: Übung 1 (Beweisidee ins Detail) und Übung 2 (mit vollständigen Beweis)

Übung 1. *Das ℓ_p-Minimierungsproblem mit $0 < p < 1$ ist NP-schwer*

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times N}$ und $y \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Das ℓ_p-Minimierungsproblem ist definiert durch

$$\min_{z \in \mathbb{K}^N} \|z\|_p \qquad \text{mit NB} \quad Az = y.$$

Das *Zerlegungsproblem* ist definiert durch die Ja/Nein Frage: gegeben ein System $\{a_1, \ldots, a_n\}$, gibt es zwei Mengen $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ so dass $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$ und $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_j$?

Bei der Annahme, dass das Zerlegungsproblem NP-vollständig ist, zeige, dass das ℓ_p-Minimierungsproblem NP-schwer ist.

Hilfe: Es ist nützlich, die folgende Matriz und den folgenden Vektor einzuführen.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y = (0, 1, 1, \ldots, 1).$$

Übung 2. Sei $x \in \mathbb{R}^N$ und sei y die Messung von x gegeben durch $y = f(x)$, wobei $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ ist. Zeige, dass $m^* = 2s$ die minimale Anzahl von Messungen zur Rekonstruktion s-dünner Vektoren ist.

Hilfe: Um $m^* \geq 2s$ zu zeigen, kann man den Satz von Borsuk-Ulam verwenden. Um $m^* \leq 2s$ zu zeigen, kann man total positive Matrizen verwenden.

Satz von Borsuk-Ulam: Sei $f : \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion so dass $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Dann, existiert mindestens ein Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ so dass $f(x) = 0$.