ÜBUNGSBLATT 1

Übung 1. Sei $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, definiert durch

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 4x_2 + x_3 - x_1 \\ 3x_1 + 2x_3 - 3x_2 \\ 9x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde die zu T zugehörige Matrix A bezüglich der kanonischen Basis.
(b) Ermittle den Rang von A.
(c) Entscheide ob T injektiv, surjektiv, beides oder keines von beiden ist und erkläre warum.

Übung 2. Sei A eine $m \times n$-Matrix und sei B eine $n \times p$-Matrix. Beweise die folgende Ungleichung

$$rank(AB) \leq \min(rank(A), rank(B)).$$

Übung 3. Sei $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $F(x) = \lambda x$ mit $\lambda = a + ib$ so dass $a^2 + b^2 = 1$. Zeige, dass F eine Isometrie ist. Ist $a^2 + b^2 = 1$ eine notwendig Bedingung dafür, dass F eine Isometrie ist?

Übung 4. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq p < +\infty$ ist die ℓ^p-Norm von x definiert als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

und für $p = +\infty$ ist die ℓ^∞-Norm von x

$$\|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,n} |x_j|.$$

(a) Beweise, dass der obige Ausdruck eine Norm definiert .
(b) Beweise, dass für $1 < p < +\infty$ die ℓ^p-Norm strikt konvex ist, d. h. für alle $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ und für alle $t \in (0, 1)$ haben wir $\|tx + (1-t)y\|_p < t\|x\|_p + (1-t)\|y\|_p$. Ist die Ungleichung auch für $p = 1$ strikt?