Modul: Vorlesung und Übung Compressive sensing

Vorlesender: Prof. Ivan veselic

Compressive sensing oder compressed sensing ist ein sehr aktuelles, junges und bereits sehr einflussreiches Forschungsgebiet der Mathematik mit Anwendungen in der Signalverarbeitung,der Bild- und Mustererkennung, Fehlerkorrektur bei Informationübertragung, Signalabtastung, Datenanalyse, Big Data Science und in anderen Gebieten der Elektrotechnik, Informatik, Informationstechnik und Statistik, das vor gut zehn Jahren von David Donoho, Emanuel Candes, und Terence Tao und anderen eingeführt wurde.

Der Ursprung der Gebietes ist die Herausforderung anhand von wenigen Messungen ein komplexes Signal zu rekonstruieren, von dem man annimmt, dass es sparse (dünn besetzt) in einer geeigneten Basisdarstellung ist. Dies bedeutet, dass der Vektor des Signals in dieser Basis nur wenige Einträge besitzt, die von Null verschieden sind. Unter gewissen Voraussetzungen ermöglicht Compressive sensing in dieser Situation unterbestimmte lineare Gleichungssysteme zu lösen --- was im allgemeinen nicht möglich wäre --- und damit das Signal aus einer geringen Anzahl von Messungen zu rekonstruieren.

Die Vorlesung ist so konzipiert, dass die Grundlagenvorlesungen Analysis I und II, Lineare Algebra I und II und Wahrscheinlichkeitstheorie I ausreichen, um dem Stoff folgen und die Übungen bearbeiten zu können. Gleichzeitig werden die Verbindungen zu weiterführenden Mathematikvorlesungen wie z.B. Optimierung, Numerik und Numerische Lineare Algebra, Approximationstheorie, Funktionalanalysis, Unitäre Räume und Hilbertraumtheorie, hochdimensionale Geometrie, Banachraumgeometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie II und Konzentrationsungleichungen aufgezeigt. Im Sommersemester ist geplant, ein Seminar anzubieten, dass an die Themen der Vorlesung anschließt. Des Weiteren ist im Sommersemester eine Modul Konzentrationsungleichungen (Concentration Inequalities) geplant, dass die Themen dieser Vorlesung gut ergänzt.

Vorkenntnisse
Die Inhalte der Vorlesungszyklen „Analysis“ und „Lineare Algebra“ sowie der Vorlesung „Wahrscheinlichkeitstheorie I“ werden benötigt.

Literatur: Die Vorlesung folgt im großen und ganzen dem Buch „A mathematical introduction to compressive sensing" von S. Foucart und H. Rauhut. Insbesondere kann man bei verpassten Vorlesungen des Stoff durch Selbststudium des Buches nachholen.

Perspektiven: Seminar im folgenden Sommersemester, ergänzende, komplementäre Vorlesung Konzentrationsungleichungen im Sommersemester, anschließend ist die Vergabe von Masterarbeitsthemen möglich.

Turnus (Semester):	Unregelmäßig

Modul-Inhalt:	Dünnbesetzte (sparse) Approximation, grundlegende Algorithmen wie l1-Minimierung, Kohärenz und Restricted Isometry Property der Messmatrix, Compressive Sensing mit Zufallsmatrizen.
Lernziele:	Die Studenten sollen ein Verständnis der Theorie und Anwendungen des Compressive Sensing erwerben.
Literatur:	S. Foucart, H. Rauhut, A Mathematical Introduction to Compressive Sensing, Birkhäuser, 2013.
Unterrichtssprache:	Deutsch, auch einvernehmlichen Wünsch aller Hörer auch Englisch möglich.
Benotung:	Prüfungsleistung: Bestehen einer mündlichen Prüfung oder Klausur; Prüfungsdauer und -art werden am Anfang des Semesters bekannt gegeben
Sonstiges:	Verwendbarkeit: Seminar, Masterarbeit

Kurzer zusammenhängender Text, der die grundlegende mathematische Fragestellung, die der Vorlesung zugrunde liegt, beschreibt:

Die Grundidee des Compressive Sensing um unterbestimmte lineare Systeme zu lösen, besteht darin, unter der Vielzahl von Lösungsvektoren denjenigen zu finden, welcher die meisten Nullen enthält. Es handelt sich also um die Minimierungsaufgabe

$$\min\{||x||_0 : Ax = b\}, \qquad (1)$$

wobei A eine rechteckige Matrix ist, deren Spaltenzahl viel größer als die Zeilenzahl. Das Symbol $||x||_0$ bezeichnen die Kardinalität des Trägers des Vektors x,, d.h. die Anzahl der Komponenten von x, die von Null verschieden sind. Ein erstes Resultat der Theorie des Compressive Sensing besagt, dass die Lösung von (1) in der Tat mit dem ursprünglichen Signalvektor x übereinstimmt, falls x, selbst schon sparse war und die Matrix A die sogenannte Restricted Isometry Property oder Uniform Uncertainty Principle erfüllt. Leider hat das Problem (1) eine hohe Komplexität und ist nicht in vernünftiger Rechenzeit lösbar. Aus diesem Grund ist der Ansatz vernünftig es durch ein verwandtes Optimierungsproblem zu ersetzten. Betrachtet wird dann

$$\min\{||x||_1 : Ax = b\}, \qquad (2)$$

d.h. das zu minimierende Funktional ist nun die L^1-Norm, $||x||_1 = \sum_k |x_k|$. Da Problem (2) , im Gegensatz zu (1) ein konvexes Optimierungsproblem ist, ist es wesentlich einfacher und schneller zu lösen. Ein Hauptresultat des Compressive Sensing ist, dass in vielen Situation die Lösungen der beiden Minimierungsprobleme (1) und (2) übereinstimmen.