TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK

Analysis III für Lehramt

Beweis von Satz 4.4.9

Sind $z = a + ib$ und $\bar{z} = a - ib$ konjugiert komplexe Nullstellen der Vielfachheit μ von P, so sind $y_1(x) := x^\ell e^{(a+ib)x}$ und $y_2(x) := x^\ell e^{(a-ib)x}$ Lösungen von $L[y] = 0$. Wegen der Linearität des Operators L sind dann auch die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\, y_1(x) + \tfrac{1}{2}\, y_2(x) &= \tfrac{1}{2}\, x^\ell e^{(a+ib)x} + \tfrac{1}{2}\, x^\ell e^{(a-ib)x} = \mathrm{Re}\,(x^\ell e^{(a+ib)x}) = x^\ell e^{ax} \cos bx\,, \\ \tfrac{1}{2i}\, y_1(x) - \tfrac{1}{2i}\, y_2(x) &= \tfrac{1}{2i}\, x^\ell e^{(a+ib)x} - \tfrac{1}{2i}\, x^\ell e^{(a-ib)x} = \mathrm{Im}\,(x^\ell e^{(a+ib)x}) = x^\ell e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

Lösungen von $L[y] = 0$. Daher sind alle angegebenen Funktionen Lösungen von $L[y] = 0$. Der Beweis der linearen Unabhängigkeit erfolgt ähnlich wie im Beweis von Satz 4.4.8, und wir verzichten daher darauf.