TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK

Analysis III für Lehramt

Beweis von Satz 4.4.8

Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Funktionen Lösungen von $L[y] = 0$ sind. Dazu betrachten wir für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$y(x) := x^r e^{\lambda x} .$$

Dann folgt (mit $a_n = 1$)

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} \left(x^r e^{\lambda x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d^r}{d\lambda^r} e^{\lambda x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^r}{d\lambda^r} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x}\right)$$

$$= \frac{d^r}{d\lambda^r} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x}\right) = \frac{d^r}{d\lambda^r} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x}\right) = \frac{d^r}{d\lambda^r} \left(P(\lambda) e^{\lambda x}\right) .$$

Nun folgt mit der Leibnizschen Produktregel

$$L[y] = \sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell} \left(\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} P(\lambda)\right) x^{r-\ell} e^{\lambda x} .$$

Ist nun $\lambda = \lambda_j$ eine Nullstelle von P der Vielfachheit r_j, so gilt

$$P(\lambda_j) = P'(\lambda_j) = \cdots = P^{(r_j - 1)}(\lambda_j) = 0$$

und daher folgt für $r = 0, 1, \ldots, r_j - 1$

$$L[y] = 0 .$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass die angegebenen Funktionen linear unabhängig sind. Eine Linearkombination dieser Funktionen ist von der Form

$$P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x) e^{\lambda_m x}$$

mit Polynomen P_j vom Grad höchstens $r_j - 1$ für $j = 1, \ldots, m$. Es ist also zu zeigen, dass aus

$$P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x) e^{\lambda_m x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $P_1(x) = \cdots = P_m(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion nach m. Für $m = 1$ ist dies offensichtlich richtig. Nun gelte die Behauptung für ein $(m-1)$, und es sei

$$P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_{m-1}(x) e^{\lambda_{m-1} x} + P_m(x) e^{\lambda_m x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\lambda_m x}$ und erhalten

$$P_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + \cdots + P_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} + P_m(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Jetzt differenzieren wir diese Gleichung r_m-mal nach x und erhalten

$$\tilde{P}_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + \cdots + \tilde{P}_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\tilde{P}_j$ Polynome vom selben Grad wie P_j sind. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt nun $\tilde{P}_1(x) = \cdots = \tilde{P}_{m-1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $P_1(x) = \cdots = P_{m-1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher auch $P_m(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.