Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 28. Januar 2015

Analysis III für Lehramt

14. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 02.02.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Bestimmen Sie die Picard-Iterierten y_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ für das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + 2xy - y^2\,, \quad y(0) = 0$$

sowie die Taylorpolynome T_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ der Lösung im Punkt $x_0 = 0$.

2) a) Veranschaulichen Sie das Iterationsverfahren aus dem Banachschen Fixpunktsatz für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geometrisch.

   b) Zeigen Sie, dass die Bedingung $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle x, $y \in X$ anstelle der Kontraktionsbedingung im Banachschen Fixpunktsatz nicht hinreichend ist. Betrachten Sie dazu das Beispiel $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(x) := x + \frac{1}{1+x}$.

3) Prüfen Sie ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist (Beweis oder Gegenbeispiel):

   Sind $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, so hat das Anfangswertproblem $y' = g(x)h(y)$, $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Falls die Aussage falsch ist, formulieren Sie eine entsprechende wahre Aussage und beweisen Sie diese.

4) a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + 4xy = 8x^3\,, \quad y(0) = 1\,.$$

   b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$$

   mit stetigen Funktionen p und q auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Substituieren Sie $u = y^\beta$ mit einem geeigneten $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass sich eine lineare Differentialgleichung für u ergibt.

   c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1 + x)y' = y - y^2\,, \quad y(0) = 1$$

   mit Hilfe der in (b) entwickelten Lösungsmethode.

`www.mathematik.uni-dortmund.de/sites/lehrstuhl-funktionentheorie/analysis-iii-fuer-lehramt-gymnasium`