Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 14. Januar 2015

Analysis III für Lehramt

12. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 19.01.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   a) $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{e^{\pi z/4}}{(iz+1)(z-1)^2}\,dz$

   b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$

   c) $\displaystyle\int_{|2z-2|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,, \quad n \in \mathbb{N}$

2) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion.

   a) Zeigen Sie, dass für jedes $\zeta \in D$ gilt
   $$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(\zeta)|}{k!}} < \infty\,.$$

   b) Welche genauere Aussage gilt, wenn $D = \mathbb{C}$, d.h. wenn f eine ganze Funktion ist?

3) Es sei f eine ganze Funktion, $m \in \mathbb{N}$ und $c > 0$. Zeigen Sie:

   a) Ist $|f(z)| \leq c(1+|z|^m)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f ein Polynom mit Grad $P \leq m$.

   b) Ist $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

   c) Ist $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

4) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f,\, g\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $f(z)g(z) = 0$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in D$ oder $g(z) = 0$ für alle $z \in D$.

   Hinweis: Sie dürfen dabei benutzen, dass jede überabzählbare Teilmenge von D einen Häufungspunkt in D besitzt.