Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 17. Dezember 2014

Analysis III für Lehramt

10. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 05.01.2015, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Zeigen Sie: Kreise (d.h. Kreislinien) und Geraden lassen sich in $\mathbb{C}$ einheitlich darstellen durch eine Gleichung der Form

$$(*) \qquad \varepsilon z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + \alpha = 0$$

mit ε, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{C}$.

2) a) Untersuchen Sie, in welchen $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z \operatorname{Re} z$ komplex differenzierbar ist.

   b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f holomorph in D. Zeigen Sie: Ist $|f|$ konstant, so ist f konstant.

   c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen der Form $f(z) = u(x) + iv(y)$, wobei $z = x + iy$ und u, $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind.

3) Zeigen oder widerlegen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|\sin z| \leq 1$.

4) Es seien a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, $D := \mathbb{C}$ für $c = 0$ und $D := \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ für $c \neq 0$. Weiter sei $T\colon D \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

   a) Zeigen Sie, dass T holomorph und injektiv in D ist und berechnen Sie T'. Bestimmen Sie weiterhin die Bildmenge $G = T(D)$, sodass $T\colon D \to G$ bijektiv ist. Bestimmen Sie schließlich die Umkehrfunktion $T^{-1}\colon G \to D$.

   b) Betrachten Sie jetzt speziell

$$T(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

   wobei $a \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass T die Mengen $\mathbb{D}$ und $\partial\mathbb{D}$ jeweils bijektiv auf sich abbildet.

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr