Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 10. Dezember 2014

Analysis III für Lehramt

9. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 15.12.2014, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Die nördliche Hemisphäre $\mathbb{S}^2_+ := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z>0 \,\}$ lässt sich auf verschiedene Arten parametrisieren. Eine Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\psi_1\colon \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \times \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3\,, \quad \psi_1(\varphi,\theta) := (\sin\varphi\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi\cos\theta)^\top\,.$$

Zum anderen lässt sich $\mathbb{S}^2_+$ als Graph der Funktion $h\colon U_1(0) \to \mathbb{R}$ mit $h(u,v) := \sqrt{1-u^2-v^2}$ darstellen (vergleiche 2.3.2 (a)).

a) Bestimmen Sie den Parameterwechsel zwischen diesen beiden Darstellungen.

b) Bestimmen Sie die Tangentialebene an $\mathbb{S}^2_+$ im Nordpol $S=(0,0,1)$ und im Punkt $P = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$. Bestimmen Sie weiterhin den äußeren Normaleneinheitsvektor in diesen Punkten.

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche S des Torus T aus Aufgabe 1 (a), Blatt 6.

3) Der Schwerpunkt S einer Fläche F in $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$S := \frac{1}{\sigma(F)} \left(\int_F x\,d\sigma, \int_F y\,d\sigma, \int_F z\,d\sigma \right)\,.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt

a) der nördlichen Hemisphäre $\mathbb{S}^2_+$,

b) der Oberfläche S_+ des im Halbraum $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \,\}$ gelegenen Teils des Torus aus Aufgabe 1 (a), Blatt 6.

4) a) Gegeben sei ein Flächenstück $S = G_f$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

b) Berechnen Sie auf diese Weise erneut den Flächeninhalt der nördlichen Hemisphäre $\mathbb{S}^2_+$.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G_f für $f\colon U_1(0) \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^2 - y^2$.