Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 3. Dezember 2014

Analysis III für Lehramt

8. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 08.12.2014, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Untersuchen Sie ob die folgenden Vektorfelder $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wirbelfrei sind und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential:

   a) $v(x,y) := (x,y)^\top$,
   b) $v(x,y) := (xy, e^{xy})^\top$,
   c) $v(x,y) := ((x-1)(y-1), x^2y)^\top$,
   d) $v(x,y) := (-xe^{xy}, ye^{xy})^\top$,
   e) $v(x,y) := (2x+3y^2, 6xy-e^y)^\top$

2) Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Weiter seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $v\colon D \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

   a) $\operatorname{rot} \nabla f = 0$, b) $\operatorname{rot}(fv) = f \operatorname{rot} v + (\nabla f) \times v$, c) $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$.

3) a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und für jede abgeschlossene Kugel $K \subset \mathbb{R}^n$ gelte
$$\int_K f(x)\, d\lambda^n(x) = 0\,.$$
   Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

   b) Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $v = (p,q)^\top\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die für alle glatten, geschlossenen Kurven Γ in $\mathbb{R}^2$ und alle $c \in \mathbb{R}^2$ die Bedingung
$$\int_\Gamma \langle v(x), dx\rangle = \int_\Gamma \langle v(x+c), dx\rangle$$
   erfüllen.

   Hinweis: Verwenden Sie den Integralsatz von Green und Teil (a).

4) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die von dem Intervall $[0, 2\pi]$ und der Kurve Γ mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^\top$, $t \in [0, 2\pi]$ berandet wird.