Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 26. November 2014

# Analysis III für Lehramt

7. Übungsblatt, WiSe 2014/15

**Abgabe** bis Montag, 01.12.2014, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $(f_j)$ eine Folge messbarer Funktionen $f_j\colon K \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

   a) $|f_j(x)| \leq 1$ für alle $x \in K$ und $j \in \mathbb{N}$,

   b) der Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ existiert für jedes $x \in K$.

   Zeigen Sie, dass $f_j,\ f \in \mathscr{L}^1(K)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und
   $$\lim_{j\to\infty} \int_K f_j(x)\, d\lambda^n(x) = \int_K f(x)\, d\lambda^n(x)\,.$$
   Kann man die Voraussetzung (a) weglassen?

   Kann man die Voraussetzung der Kompaktheit von $K$ abschwächen?

2) Berechnen Sie jeweils die Kurvenintegrale $\int_\Gamma \langle v(x,y), d(x,y)\rangle$ :

   a) $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) := (x^2 + xy^2, y^3 + x^2 y)^\top$ und $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit
   $$\gamma(t) := \begin{cases} \left(1 - \frac{2t}{\pi}, 0\right)^\top & \text{für } 0 \leq t \leq \pi\,, \\ (\cos t, \sin t)^\top & \text{für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

   b) $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) := (y, -x)^\top$ und $\gamma\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := e^{-t}(\cos t, \sin t)^\top$

3) Es sei $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig auf $(0,\infty)$ und das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
   $$v(x,y) = \left(-\varphi(r) y, \varphi(r) x\right)^\top\ ,$$
   wobei $r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma \langle v(x,y), d(x,y)\rangle$, wobei $\Gamma$ die einmal positiv durchlaufene Kreislinie um $(0,0)$ mit Radius $R > 0$ ist.

4) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet $v\colon D \to \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld mit Potential $\phi$ und $\Gamma$ eine Kurve in $D$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \to D$. Weiter gelte das Newtonsche Bewegungsgesetz
   $$\gamma''(t) = v(\gamma(t))\,, \quad t \in [a,b]\,.$$
   Verifizieren Sie den Energieerhaltungssatz
   $$\tfrac{1}{2}\left\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\right\rangle\Big|_a^b = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))\,.$$