TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK
DIPL.-MATH. BENJAMIN MEHANNA

Dortmund, 19. November 2014

Analysis III für Lehramt

6. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 24.11.2014, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Berechnen Sie das Volumen

   a) des *Torus* $T \subset \mathbb{R}^3$, der durch Rotation der Kreisscheibe
   $$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 5)^2 + z^2 \leq 1 \}$$
   um die z-Achse entsteht,

   b) des *Ellipsoids*
   $$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$
   mit a, b, $c > 0$,

   c) der Menge
   $$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} \leq 1 \right\} .$$

2) Es sei $a > 0$. Die *Lemniskate* $L \subset \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Punkte, für die das Produkt der Abstände von den Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ den Wert a^2 besitzt.

   a) Skizzieren Sie L und begründen Sie, dass
   $$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \right\} .$$

   b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der „rechten Schlaufe“ begrenzt wird.

3) Berechnen Sie den Schwerpunkt

   a) der Halbkugel $H := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0 \}$,

   b) des im Halbraum $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \}$ gelegenen Teils T_x des Torus aus Aufgabe 1 (a),

   c) des im Halbraum $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0 \}$ gelegenen Teils T_z des Torus aus Aufgabe 1 (a).

4) Geben Sie eine Kurve $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit
   $$\gamma([0, 2\pi]) = K := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2ax(x^2 + y^2) + a^2y^2 \}$$
   an unf berechnen Sie deren Länge und den Inhalt der berandeten Fläche.