Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 5. November 2014

Analysis III für Lehramt

4. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 10.11.2014, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte sofern sie existieren:

   (a) $$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^{2n}}$$

   (b) $$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cdot \sin x \, dx$$

   Hinweis: Sie dürfen in (b) benutzen, dass für $n \geq x \geq 0$ gilt
   $$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2) Beweisen Sie Satz 1.3.5 über parameterabhängige Integrale.
   Anleitung: Betrachten Sie zum Nachweis der Stetigkeit in $x_0 \in D$ eine Funktionenfolge der Art $f_k\colon E \to \mathbb{R}$ mit $f_k(y) := f(x_k, y)$ und wenden Sie den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz an. Finden Sie für den Nachweis der Differenzierbarkeit selbst eine geeignete Funktionenfolge.

3) Es seien $f,\, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$f(x,y) := \begin{cases} 2ye^{-x-y^2} & \text{für } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
   $$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$
   Berechnen Sie die iterierten Integrale
   $$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy\,, \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\,dx\,, \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dx\,dy\,, \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,dy\,dx$$
   und entscheiden Sie, ob f und g Lebesgue-integrierbar sind.

4) Berechnen Sie das Volumen des Rotationsparaboloids
   $$P := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \,\}$$
   und der Menge
   $$S := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \,\} \cap \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1 \,\}\,.$$