Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 29. Oktober 2014

Analysis III für Lehramt

3. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 03.11.2014, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

1) Es seien A, $B \subset \mathbb{R}^n$ messbare Mengen und $A \subset B$. Zeigen Sie, dass $B \setminus A$ messbar ist und $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.

2) Konstruieren Sie eine unbeschränkte messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ deren Maß positiv und endlich ist.

3) Zeigen Sie:

   a) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist das Urbild $f^{-1}(I)$ messbar.

   b) Sind f, $g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen, ist f messbar und ist $g(x) = f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist auch g messbar.

   c) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (dies bedeutet, dass es eine Konstante $m > 0$ gibt mit $|f(x) - f(y)| \leq m|x - y|$ für alle x, $y \in \mathbb{R}$) und $N \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, so ist $f(N)$ eine Nullmenge.

4) Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f dann auf $[a, b]$ auch Lebesgue-integrierbar ist und dass gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,d\lambda(x)\,.$$

Hinweis: Konstruieren Sie geeignete Folgen (u_n), (v_n) von Treppenfunktionen mit $u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq f(x) \leq v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$ für $x \in [a, b]$ und wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz an.