

Analysis III für Lehramt

2. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Abgabe bis Montag, 27.10.2014, 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 100 im Foyer

- 1) a) Zeigen Sie, dass jede überabzählbare Menge $M \subset \mathbb{R}$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt.
b) Kann man die Aussage in (a) noch verschärfen?
c) Gilt die Aussage in (a) auch für abzählbare Mengen?
d) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *perfekt*, wenn $M' = M$ gilt, wobei M' die Menge aller Häufungspunkte von M bezeichnet. Zeigen Sie, dass jede perfekte Menge $M \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist.
- 2) a) Zeigen Sie: Zu jeder Folge (Q_k) abgeschlossener Quader und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge (P_k) halboffener Quader mit $Q_k \subset P_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(P_k) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon.$$

- b) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es eine Folge (Q_k) abgeschlossener Quader mit $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon$. Zeigen Sie, dass M eine Nullmenge ist.
 - c) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph G_f von f eine Nullmenge in \mathbb{R}^2 ist.
- 3) Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $A_k \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Ferner seien $B, C \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie:
 - a) Ist $B \subset C$, so ist $\lambda(B) \leq \lambda(C)$.
 - b) Ist $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ messbar mit $\lambda(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(A_k)$.
 - 4) Es sei $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

messbar ist und

$$\lambda^2(M) = \int_a^b f(x) dx.$$