Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 15. Oktober 2014

Analysis III für Lehramt

1. Übungsblatt, WiSe 2014/15

Keine Abgabe!

Die folgenden Aufgaben sind eine Wiederholung über Mächtigkeit, Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von Mengen. Dabei ist eine abzählbare Menge gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

1) Zeigen Sie:

   a) Jede unendliche Menge M besitzt eine abzählbare Teilmenge.

   b) Eine Menge M ist unendlich genau dann, wenn Sie eine echte Teilmenge gleicher Mächtigkeit besitzt.

2) Zeigen Sie:

   a) Sind A und B abzählbar, so ist auch $A \times B$ abzählbar.

   b) Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge M_n abzählbar, so ist $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ abzählbar.

   c) Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

3) Zeigen Sie:

   a) Das offene Intervall $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig.

   b) Die Intervalle $(0, 1)$, $[0, 1)$ und $[0, 1]$ sind gleichmächtig. Konstruieren Sie hierzu explizit bijektive Abbildungen $f\colon (0, 1) \to [0, 1)$ und $g\colon (0, 1) \to [0, 1]$.

   c) Ist M eine überabzählbare Menge und A eine abzählbare Teilmenge von M, so sind M und $M \setminus A$ gleichmächtig.

4) Zeigen Sie:

   a) Die Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ ist gleichmächtig zur Menge M aller Folgen (a_n) mit $a_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) Die Menge B aller Folgen $(b_n) \in M$, die höchstens endlich viele Einsen enthalten, ist abzählbar und die Menge M ist überabzählbar.

   c) Die Menge C aller Folgen $(c_n) \in M$, die unendlich viele Nullen enthalten und das Intervall $[0, 1)$ sind gleichmächtig. Benutzen Sie dazu die Binärdarstellung reeller Zahlen.

   d) Die Mengen $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig und überabzählbar.