Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

9. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

(Fouriertransformation)

Abgabe bis Donnerstag, 19.12. 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Beweisen Sie mindestens drei der nachstehenden Regeln für die Fouriertransformation (alle zu transformierenden Funktionen seien Lebesgue-integrierbar).

- $f(\mathbf{t}) = \phi_1(t_1) \cdots \phi_n(t_n) \Rightarrow \hat{f}(\mathbf{x}) = \hat{\phi}_1(x_1) \cdots \hat{\phi}_n(x_n)$.
- $\widehat{f+g}\,(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}) + \hat{g}(\mathbf{x})$ *und* $\widehat{\alpha f}\,(\mathbf{x}) = \alpha \hat{f}(\mathbf{x})$.
- $g(\mathbf{t}) = e^{2\pi i \mathbf{a}\cdot\mathbf{t}} f(\mathbf{t}) \Rightarrow \hat{g}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$.
- $g(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t} - \mathbf{a}) \Rightarrow \hat{g}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}$.
- $g(\mathbf{t}) = \overline{f(\mathbf{t})} \Rightarrow \hat{g}(\mathbf{x}) = \overline{\hat{f}(-\mathbf{x})}$.
- $g(\mathbf{t}) = f(-\mathbf{t}) \Rightarrow \hat{g}(\mathbf{x}) = \hat{f}(-\mathbf{x})$.
- $g(\mathbf{t}) = f(A^{-1}\mathbf{t}) \Rightarrow \hat{g}(\mathbf{x}) = |\det A| \hat{f}(A\mathbf{x})$ $(\det A \neq 0)$.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $f(t) = \sinh t$ für $|t| \leq 1$ und $f(t) = 0$ sonst.

Aufgabe 3 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei F_n die Fouriertransformierte von $t^n e^{-\pi t^2}$. Berechnen Sie F_n' und leiten Sie so eine Formel zur rekursiven Berechnung von F_n her (Berechnung von F_{n+1} aus F_n). Berechnen Sie konkret F_n für $n \leq 4$, ausgehend von $F_0(x) = e^{-\pi x^2}$.

Aufgabe 4 Eine Denkaufgabe ($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-integrierbar).

a. Welche Voraussetzung an f garantiert, dass $\hat{f}$ gerade, ungerade oder reellwertig ist?

b. Klären Sie den Zusammenhang zwischen der Cosinus- und der Sinustransformation

$$f \mapsto \int_0^\infty f(t) \cos(2\pi x t)\, dt, \;\; f \mapsto \int_0^\infty f(t) \sin(2\pi x t)\, dt$$

einerseits und der Fouriertransformation andererseits. (Die diskrete Cosinustransformation bildet die mathematische Grundlage für die jpeg-Kompression, modifiziert für MP3).

Weitere Informationen über
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html`