Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

8. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

Fourierreihen

Abgabe bis Donnerstag, 12.12. 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Berechnen Sie die reellen(!) Fourierkoeffizienten von

- $f(t) = |\sin t|$
- $f(t) = \max\{0, t\}$ in $(-\pi, \pi]$, 2π-periodisch fortgesetzt.

Aufgabe 2 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt α-hölderstetig ($0 < \alpha \le 1$), wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f \in L_{2\pi}$ noch α-hölderstetig, so gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$$

(sogar gleichmäßig) auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L_{2\pi}$ mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$. Zeigen Sie

$$\widehat{f'}_k = ik\hat{f}_k \quad (k \neq 0)$$

und folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k$ absolut, somit die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. (Hinweis: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $\sum_{k\neq 0} k|\hat{f}_k| \cdot \frac{1}{k}$.)

Zeigen Sie auch die Konvergenz von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2n}|\hat{f}_k|^2$ für $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L_{2\pi}$.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass es für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Polynome T_n und U_n vom Grad n und $n - 1$ gibt mit

a. $\cos nx = T_n(\cos x)$ und

b. $\sin nx = U_n(\cos x) \sin x$.

(Hinweis: Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und binomischer Satz oder Induktion.)