Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

7. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

Abgabe bis Donnerstag, 5.12. 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Es sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $|f(t)| \le Ke^{-t}$ für $t \ge 1$. Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \int_0^\infty f(t) t^{x-1} dt$$

zur Klasse $C^\infty(0, \infty)$ gehört. Falls zusätzlich $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n)$ für $t \to 0$ gilt, ist

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x+k} + F_n(x) \text{ mit } F_n \in C^\infty(-n, \infty)$$

zu zeigen.

Aufgabe 2 Es sei $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(xy)}{y(1+y^2)}\, dy$.

1. Zeigen Sie, dass F auf $\mathbb{R}$ definiert und stetig ist.
2. Zeigen Sie $F \in C^1(\mathbb{R})$ und berechnen Sie $F'(x)$ zunächst für $x > 0$.
3. Bestimmen Sie damit eine explizite Darstellung der Funktion F.

Aufgabe 3 Es seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie ($\star$ bedeutet Faltung):

1. $f \star g = g \star f$ f.ü.
2. $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ f.ü.
3. $\|f \star g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

Aufgabe 4 Es seien (a_k) und (b_k) monoton fallende Nullfolgen. Zeigen Sie, dass

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ für $x \ne \ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$, und

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ für alle $x \in \mathbb{R}$

konvergiert. (Hinweis: Abel-Dirichlet Kriterium und Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.)

Weitere Informationen über
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html