

5. Übungsblatt zu Analysis III

WS 2013/14

(Fubini, Transformationsformel)

Abgabe bis Donnerstag, 21.11 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Die Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ begrenzen zusammen mit der Ebene durch die Punkte $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ und $(0, 0, 2)$ des \mathbb{R}^3 das Tetraeder $T \subset \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie $\int_T xyz d(x, y, z)$.

Aufgabe 2 Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und K der “Kegel” in \mathbb{R}^{n+1} mit “Grundfläche” G und Spitze in (\mathbf{x}_0, h) ($h > 0$), d.h.

$$K = \left\{ \left(\mathbf{x} + \frac{z}{h}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}), h \right) : \mathbf{x} \in G, 0 < z < h \right\}$$

(Skizze für $n = 1$ und $n = 2$). Zeigen Sie $\lambda^{n+1}(K) = \frac{1}{n+1} \lambda^n(G)$.

Aufgabe 3 Es sei G das von den Geraden $2x + 3y = 1$, $2x + 3y = 3$, $x - 2y = 2$ und $x - 2y = -2$ berandete Gebiet des \mathbb{R}^2 . Skizzieren Sie G , bestimmen Sie eine (lineare) Transformation $\Phi : G \rightarrow (1, 3) \times (-2, 2)$ und berechnen Sie das Lebesguemaß von G .

Aufgabe 4 Es sei G das beschränkte Gebiet im 1. Quadranten, das von den Graphen der Funktionen $y = 2x^3$, $y = 3x^3$, $y = \sqrt{x}$ und $y = 2\sqrt{x}$ berandet wird. Skizzieren Sie G , bestimmen Sie einen Diffeomorphismus $\Phi : G \rightarrow (2, 3) \times (1, 2)$ und berechnen Sie

$$\int_G xy d(x, y).$$

(**Hinweis:** Betrachten Sie die Graphen $y = ux^3$ und $y = v\sqrt{x}$ solange sie in G verlaufen; welche u und v kommen in Frage?)

Weitere Informationen über

<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html>