

4. Übungsblatt zu Analysis III

WS 2013/14

(Fubini – Tonelli – Cavalieri)

Abgabe bis Donnerstag, 14. 11. 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Halboffene Intervalle der Form

$$I = [2^{-m}\ell_1, 2^{-m}(\ell_1 + 1)) \times \cdots \times [2^{-m}\ell_n, 2^{-m}(\ell_n + 1)) \subset \mathbb{R}^n \quad (m \in \mathbb{N}, \ell_\nu \in \mathbb{Z})$$

heissen *dyadisch* der Generation m . Zeigen Sie, dass jede beschränkte offene Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ in der Form $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ mit paarweise disjunkten dyadischen Intervallen I_k geschrieben werden kann (verschaffen Sie sich eine Idee mittels einer Skizze auf kariertem Papier). Gilt das auch für unbeschränkte offene Mengen?

Aufgabe 2 Skizzieren Sie G und berechnen Sie $\int_G f(x, y) d(x, y)$ in den folgenden Fällen:

1. $f(x, y) = x$ und $G \subset \mathbb{R}^2$ ist das beschränkte Gebiet zwischen den Graphen von $y = x^2$ und $y = x + 6$;
2. $f(x, y) = e^{-y^5}$ und $G \subset \mathbb{R}^2$ ist das beschränkte Gebiet, das von der y -Achse, der Geraden $y = 2$ und dem Graphen von $x = y^4$ berandet ist.

Aufgabe 3 Gegeben seien die Zylinder $Z' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $Z'' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1\}$. Berechnen Sie das Volumen von $Z = Z' \cap Z''$.
(**Hinweis:** Betrachten Sie die y -Schnitte $Z_y = \{(x, z) : (x, y, z) \in Z\}$.)

Aufgabe 4 Skizzieren Sie $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 4 - x^2\}$ und berechnen Sie das Maß der Menge $K \subset \mathbb{R}^3$, die folgendermaßen konstruiert wird: Über jedem nichtleeren x -Schnitt G_x wird eine (gleichschenklige) Dreiecksfläche der Höhe 1 errichtet.

Weitere Informationen über

<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html>