

3. Übungsblatt zu Analysis III

WS 2013/14

Konvergenzsätze, Majoranten

Abgabe bis Donnerstag, 7. 11. 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionenfolgen (f_n) , $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jeweils eine integrierbare Majorante und berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$:

$$(1) \quad f_n(x) = \begin{cases} (\sin x)^n & x \in [0, \pi]; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \quad (2) \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + (nx)^2};$$

$$(3) \quad f_n(x) = \begin{cases} \cos(x^n) & x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \quad (4) \quad f_n(x) = \begin{cases} \log(x + \frac{1}{n}) & x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases};$$

$$(5) \quad f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Hinweis: } 1 - t \leq e^{-t} \text{ für } 0 \leq t \leq 1).$$

(Hinweis zu (4): Skizzieren Sie die Graphen von f_1 , $|f_4|$ und $|\log x|$.)

Aufgabe 2 Es sei (h_k) eine Folge in $L(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $\sum_{k=0}^{\infty} \int |h_k| < \infty$. Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ f.ü. konvergiert und $\int h = \sum_{k=0}^{\infty} \int h_k$ gilt.

(Hinweis: Satz von Beppo Levi für $f_\ell(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\ell} |h_k(\mathbf{x})|$.)

Aufgabe 3 Konstruieren Sie jeweils eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (eine Skizze hilft) mit folgenden Eigenschaften:

1. $f_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) f.ü., $0 \leq f_n(x) \leq 1$ überall und $\int f_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).
2. $f_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) f.ü., $f_n(x) = 0$ für $x \notin [0, 1]$ und $\int f_n = 1$.

In welchem Zusammenhang stehen diese Beispiele mit den Konvergenzsätzen der Vorlesung?

Aufgabe 4 Es sei $f \in L(\mathbb{R}^n)$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt. Zeigen Sie $fg \in L(\mathbb{R}^n)$.

Weitere Informationen über

<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html>