Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

2. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

Treppenfunktionen, iterierte Integrale

Abgabe bis Donnerstag, 31. 10. 2013, 10 Uhr

Aufgabe 1 Es sei f eine stetige und positive Funktion auf $\mathbb{R}$. Konstruieren Sie eine Folge (ϕ_n) von Treppenfunktionen, die überall gegen f konvergiert. Zeigen Sie $f \in L^+(\mathbb{R})$, falls das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ existiert; es gilt dann $\displaystyle\int f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Aufgabe 2 Mit den Funktionen $f_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ $(1 \le \nu \le n)$ wird $f(\mathbf{x}) = \displaystyle\prod_{\nu=1}^{n} f_\nu(x_\nu)$ gebildet. Zeigen Sie:

a) Sind alle f_ν Treppenfunktionen ($f_\nu(x) = 0$ für $x < a_\nu$ und für $x > b_\nu$), so auch f.

b) Sind alle $f_\nu \in L^+(\mathbb{R})$, so ist $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$.

Im ersten Fall ist $\displaystyle\int f_\nu = \int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(x)\,dx$ zu zeigen, und $\displaystyle\int f = \prod_{\nu=1}^{n} \int f_\nu$ beidesmal.

Aufgabe 3 Für $x, y \ge 1$ sei $f(x,y) = \dfrac{y-x}{(x+y)^3}$. Berechnen Sie die **iterierten** Integrale

$$\int_1^\infty \Big(\int_1^\infty f(x,y)\,dx\Big)\,dy \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \Big(\int_1^\infty f(x,y)\,dy\Big)\,dx$$

und, sofern möglich,

$$\int_1^\infty \Big(\int_1^\infty |f(x,y)|\,dx\Big)\,dy \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \Big(\int_1^\infty |f(x,y)|\,dy\Big)\,dx.$$

Wiederholen Sie das Ganze mit $f(x,y) = \dfrac{y-x}{(x+y)^4}$ (verwenden Sie $\int_0^t \frac{1-s}{(1+s)^4}\,ds = \frac{3t-1}{6(1+t)^3}$).

Aufgabe 4 Es seien $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen. Zeigen Sie, dass es eine Darstellung von ϕ und ψ mit demselben Träger $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ und denselben Konstanzintervallen I_k gibt, und somit die punktweise zu bildenden Funktionen

$$\phi + \psi,\ \phi\,\psi,\ \max\{\phi,\psi\},\ \min\{\phi,\psi\},\ \phi^+,\ \phi^-, |\phi|$$

wieder Treppenfunktionen sind ($t^+ = \max\{t, 0\}$, $t^- = \max\{-t, 0\}$ für $t \in \mathbb{R}$), und weiter

$$\int(\phi+\psi) = \int\phi + \int\psi,\ \int\lambda\phi = \lambda\int\phi \quad (\lambda \in \mathbb{R}),\ \int\phi \le \int\psi \quad (\phi(\mathbf{x}) \le \psi(\mathbf{x}) \text{ f.ü.}).$$

Weitere Informationen über
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html