Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Institut für Mathematik
Lehrstuhl Funktionentheorie
Technische Universität Dortmund

13. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2013/14

(Flächenintegrale, Vektoranalysis)

Abgabe bis Donnerstag, 30.01. 2014, 10 Uhr

Aufgabe 1 Es sei E_{n-1} die $(n-1) \times (n-1)$ Einheitsmatrix, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $A = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \mathbf{c}^\top \end{pmatrix}$. Zeigen Sie

a. Aus $\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$) folgt $A^\top A\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

b. $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ ist ein Eigenvektor von $A^\top A$ zum Eigenwert $\lambda = 1 + |\mathbf{c}|^2$.

c. Berechnen Sie mittels a. und b. die Gramsche Determinante von A.

Aufgabe 2 Eine Fläche $\mathfrak{F}$ hat den Schwerpunkt $\mathfrak{s} = \dfrac{1}{|\mathfrak{F}|} \displaystyle\int_{\mathfrak{F}} \mathbf{x}\, dS$. Berechnen Sie $\mathfrak{s}$ für

a. die nördliche Hemisphäre;

b. den im Halbraum $x > 0$ gelegenen Teil eines Torus (Radien r und R);

c. den im Halbraum $z > 0$ gelegenen Teil desselben Torus.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie eine Formel für den Flächeninhalt eines expliziten Flächenstücks $\mathfrak{F} = \text{Graph}\,(f)$, und berechnen Sie so

a. den Flächeninhalt der nördlichen Hemisphäre neu;

b. den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}$ im Fall $f(x,y) = x^2 - y^2$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Aufgabe 4 Es seien $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $\mathbf{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar. Zeigen Sie (wobei die *Rotation* formal durch $\mathsf{rot}\,\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ und die *Divergenz* durch $\mathsf{div}\,\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ definiert sind, und Δ der Laplaceoperator ist):

a. $\mathsf{rot}\,\nabla u = \mathbf{0}$;

b. $\mathsf{rot}\,(u\,\mathbf{v}) = u\,\mathsf{rot}\,\mathbf{v} + (\nabla u) \times \mathbf{v}$;

c. $\mathsf{div}\,\mathsf{rot}\,\mathbf{v} = 0$;

d. $\Delta u = \mathsf{div}\,\nabla u$.

Weitere Informationen über
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/steinmetz/Stundenplanwinter.html`